

**МОДЕЛ НА СЪВМЕСТНО ПРИЛАГАНЕ НА МЕТОДИТЕ
АНАЛИЗ, СИНТЕЗ И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРИ
ТЪРСЕНЕ НА РЕШЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ***

Васил Б. Милушев, Димитър Г. Френкев

Разработен е схематичен модел на процеса съвместно прилагане на общологичните методи анализ и синтез и частните методи параметризация и въвеждане на спомагателни параметри при търсене и намиране на решения на геометрични задачи за откриване (в т.ч. и доказване) на зависимост между величини, характеризиращи зададена геометрична ситуация.

Голяма част от подходите за решаване на математически задачи предопределят съвместно използване на общологически и частни методи за търсене и откриване на решения. Овлабяването на универсалните общологични методи за решаване на задачи, каквито са например анализът и синтезът, води до по-висока трайност на мисловните умения и по-голяма преносимост на обобщените знания и свързаните с тях умения и опит в разнообразни ситуации. Усвояването на аналитико-синтетичния метод е пряко свързано с умението за отделяне на основната и специфичната информация, което от своя страна развива умения за използване на научно-познавателните методи анализиране, абстрахиране, синтезиране и др. От друга страна, редица частни методи, като например методът на параметризацията, намират голямо приложение и също имат важни образователни и развиващи функции. Ето защо, в обучението по математика системно трябва да се акцентира върху овладяването на основните общологически методи в съчетание с частни методи, които имат голяма приложимост. За тази цел съществено допринася и схематичното моделиране на самия процес на съвместното прилагане на основните общологически и частни методи за търсене и откриване на решения на математически задачи.

В настоящата статия ще представим схематичен модел на този процес при търсене и откриване решение на задачи за намиране или доказване на геометрично свойство или зависимост между параметри на геометрична фигура. Ще покажем приложимостта на този модел чрез конкретен пример.

Да разгледаме задачите от следния вид:

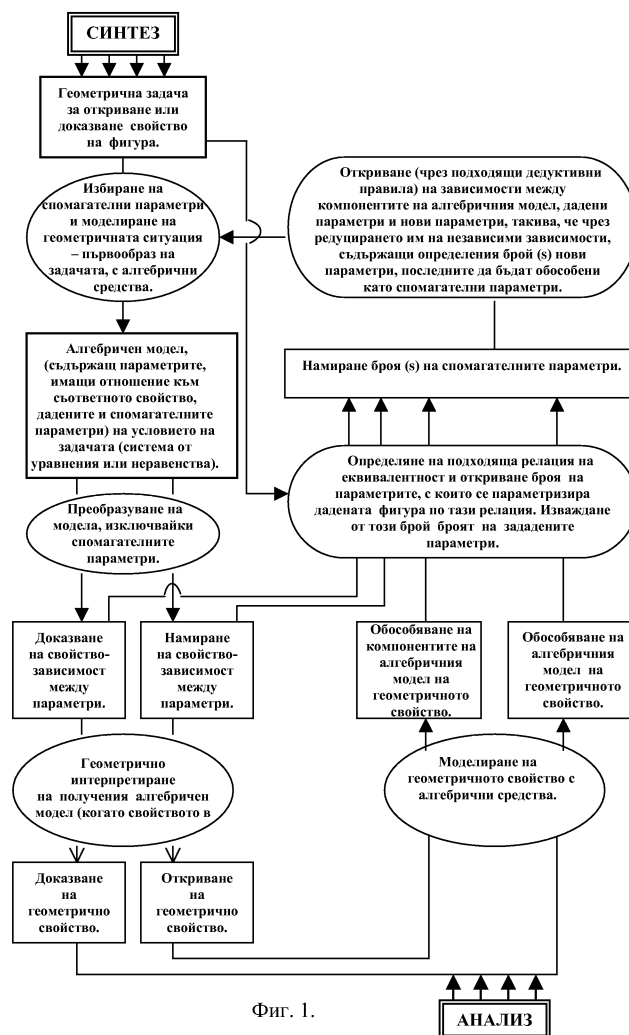
Дадена е геометрична фигура F с d на брой независими параметри ($d \geq 0$, d – цяло число). Изисква се:

– или да се намери зависимост между определени k на брой геометрични величини $x_1, x_2, \dots, x_k$, характеризиращи фигурата F ;

*Изследванията са направени с финансово съдействие на фонд НИ при ПУ. Договор € 03-П-58.

– или да се докаже, че между параметрите $x_1, x_2, \dots, x_k$ на фигурата F съществува определена зависимост $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$.

Очевидно задачата при второто изискване е по-опростена (с по-ясна цел). Възможно е да се постави такова заключение на задачата, че още при първите стъпки на анализа да се стигне до формулиране на някое от горните две изисквания, т.е. търсено геометрично свойство първо да се „преведе“ на езика на алгебрата.



Фиг. 1.

Голяма част от тези задачи са „лошо определени“ (по Л. М. Фридман [5]). При тях не е възможно компонентите на търсените алгебричен модел да се изразят явно чрез дадените величини, но е възможно да се въведат такива спомагателни параметри, че лесно да се изразят чрез тях търсените величини, а помощните параметри –

чрез дадените величини. Ако задачата е коректна, могат да се съставят такива необходими и достатъчни независими уравнения, съдържащи величините $x_1, x_2, \dots, x_k$, дадените независими параметри и въведените спомагателни параметри, че след изключването на последните, да се получи търсената зависимост $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$. За реализирането на тази идея може да се използва метода на параметризацията, който е разработен подробно в [1–3] и др.

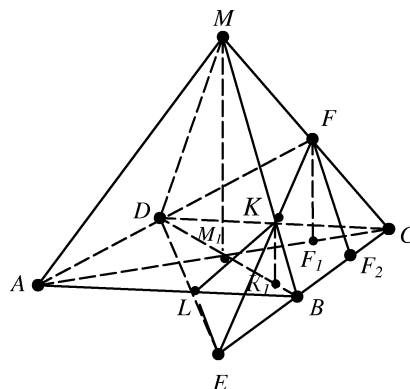
Пред вид гореизложеното, използвайки рефлексията на нашия опит, представяме схематично модела на процеса на търсене и откриване решение на задачи от посочения вид на фигура 1. Ефективността на този модел ще демонстрираме чрез следния пример.

Задача 1. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основа $ABCD$ и връх M . Точка E дели външно, считано от B , отсечката BC в отношение $\lambda < 1$, а точка F дели вътрешно, считано от C , отсечката CM в отношение μ . През точките D , E и F е прекарана равнина, която дели пирамидата на две части, обемите на които са в отношение $V' : V'' = \nu$, където V' е обемът на многостена, съдържаща върха M . Да се намери зависимост между λ , μ и ν .

Търсене на решение. На фиг. 2 е построен стереометричен модел, съответстващ на условието на задачата. Като анализираме търсеното и даденото в нея, следвайки стъпките в модела от фиг. 1, можем да отбележим следните разсъждения и резултати.

За да се намери зависимост между λ , μ и ν , е достатъчно всяка от тези величини да се изрази чрез другите величини и спомагателни параметри по такъв начин, че след изключване на последните, да се получи равенство, съдържащо само λ , μ и ν . За да се определи ν чрез λ , μ и спомагателни параметри, е достатъчно да се определят V' и V'' чрез същите тези величини.

Задачата е във висока степен „лошо определена“, защото величините V' и V'' , а значи и ν не могат явно да се изразят чрез λ , μ и други спомагателни параметри. Съществена причина за това е фактът, че многостените $ALKFDM$ и $LBCDKF$ не само че не са определени до някаква позната релация, но са



Фиг. 2.

и непознати (неизучавани) фигури. За да се разреши този проблем, е необходимо:

1. Многостените $ALKFDM$ и $LBCDKF$ да бъдат идентифицирани, като се „разделят“ на непресичащи се „познати“ фигури или те да се получат като компоненти при разделяне на други познати фигури на непресичащи се многостени. При по-внимателно проучване на вариантите за изразяване обемите на многостените чрез обемите на „познати“ фигури, се забелязва, че обемът V'' на многостена $LBCDKF$ е разликата от обемите съответно на пирамидите $CDEF$ и $BLEK$, а обемът V' на многостена $ALKFDM$ е разлика на обемите съответно на пирамидата $ABCDM$ и многостена $LBCDKF$.

За да могат V' и V'' да се изразят чрез елементи (които са спомагателни параметри) на съответните фигури-компоненти, е достатъчно последните да се параметризират до еднаквост. Кои параметри да се изберат за спомагателни зависи от наличните (изучените) дедуктивни правила, като формули, теореми, следствия и т.н. Това подсказва следващата стъпка.

2. Да се въведат такива спомагателни параметри, че от една страна, горепосочените фигури да могат да се параметризират до еднаквост, а от друга страна – да могат да се съставят необходим и достатъчен брой зависимости между λ , μ , ν и спомагателните параметри така, че след изключване на последните да се получи зависимост, в която участват само λ , μ и ν . За целта, понеже в условието на задачата не са дадени метрични параметри на пирамидата (т.е. $d = 0$), то е целесъобразно да се параметризира пирамидата до еднаквост с включването на два независими параметъра, например $AB = a$ и $AM = b$ (очевидно $0 < a < b\sqrt{2}$) или с три зависими параметъра, като третият параметър се изрази чрез останалите два, които са независими. В случая могат да се използват спомагателните параметри $AB = a$, $AM = b$ и $MM_1 = h$, като a и b са независими, а $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$. Тук, за да избегнем работата със сложни алгебрични изрази (в случая с радикали), ще използваме зависимите параметри a , b и h . Тогава:

а) пирамидата $CDEF$ може да се параметризира до еднаквост, като първо се параметризира до същата релация основата – правоъгълният триъгълник CDE с параметрите $CD = a$ и $CE = \frac{a}{1-\lambda}$, а след това от условието $CF : FM = \mu$, се уточни положението на върха F върху CM .

б) пирамидата $BLEK$ се параметризира до еднаквост, като първо се параметризира основата – правоъгълният триъгълник BLE с параметрите $BL = \lambda a$ и $BE = \frac{\lambda a}{1-\lambda}$, а след това се определи положението на върха K върху BM , като се използва фактът, че K е пресечна точка на ръба $BM = b$ и отсечката EF , краищата на която са еднозначно определени по условие.

Тъй като по този начин „помощните“ пирамиди са параметризирани до еднаквост с помощта на a , b и h , тези параметри могат да играят ролята на спомагателни.

Решение. Въвеждаме означенията: $AB = a$, $AM = b$ ($0 < a < b\sqrt{2}$), $MM_1 = h$, $V_{CDEF} = V_1$, $V_{BLEK} = V_2$ (фиг. 2). От условието на задачата следва, че $BE = \lambda CE$, а тъй като $CE = BE + a$, то се получава $CE = \frac{a}{1-\lambda}$. Тогава $S_{CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot CE = \frac{a^2}{2(1-\lambda)}$. Ако с FF_1 се означае височината на пирамидата $CDEF$, то от подобие на $\triangle CF_1F$ и $\triangle CM_1M$ се получава $FF_1 : h = CF : CM$. От условието имаме $CF = \mu FM$, а понеже $CM = CF + FM$, то $CF = \frac{\mu}{\mu+1}b$. Следователно $FF_1 = \frac{\mu}{\mu+1}h$.

$$\text{Тогава } V_1 = \frac{1}{3}S_{CDE} \cdot FF_1 = \frac{\mu}{6(1-\lambda)(\mu+1)}a^2h.$$

За намирането на V_2 първо трябва да се намери BL . От подобие на триъгълниците BLE и CDE следва, че $\frac{BL}{CD} = \frac{BE}{CE}$, а понеже $BE = \lambda CE$, то

$BL = \lambda a$, $BE = \frac{\lambda}{1-\lambda}a$. Тогава $S_{BLE} = \frac{1}{2}BL \cdot BE = \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda)}a^2$. За намирането на височината KK_1 се разглеждат подобните триъгълници BK_1K и BM_1M , откъдето $KK_1 : MM_1 = KB : MB$, т.е. $KK_1 : h = KB : b$. За намирането на KB се извършва допълнителното построение FF_2 , $F_2 \in BC$. Тогава триъгълниците KBE и FF_2E са подобни, откъдето следва, че $KB : FF_2 = BE : F_2E$. Понеже $BE = \frac{\lambda}{1-\lambda}a$, остава да се намерят FF_2 и F_2E . Тъй като триъгълникът BCM е равнобедрен, а $FF_2 \parallel MB$, то и триъгълникът F_2CF е равнобедрен. Следователно $FF_2 = CF = \frac{\mu}{\mu+1}b$.

От подобните триъгълници CF_2F и следва $CF_2 : CB = CF : CM$, т.е. $CF_2 = \frac{\mu}{\mu+1}a$. Тогава $F_2E = CE - CF_2 = \frac{1+\lambda\mu}{(1-\lambda)(\mu+1)}a$. От $KB : FF_2 = BE : F_2E$ се получава $KB = \frac{BE \cdot FF_2}{F_2E} = \frac{\lambda\mu}{1+\lambda\mu}b$, а за височината KK_1 на пирамидата $BLEK$ имаме $KK_1 = \frac{h \cdot KB}{b} = \frac{\lambda\mu}{1+\lambda\mu}h$. Тогава $V_2 = \frac{1}{3}S_{BLE} \cdot KK_1 = \frac{\lambda^3\mu}{6(1-\lambda)(1+\lambda\mu)}a^2h$. Обемът на многостена $DFCBKL$ е

$$V'' = V_1 - V_2 = \frac{\mu}{6(1-\lambda)(1+\mu)}a^2h - \frac{\lambda^3\mu}{6(1-\lambda)(1+\lambda\mu)}a^2h = \frac{\mu[1+\lambda(1+\lambda)(1+\mu)]}{6(1+\mu)(1+\lambda\mu)}a^2h.$$

Понеже обемът на пирамидата $ABCDM$ е $V = \frac{1}{3}a^2h$, то обемът на многостена $ALKFDM$ е

$$V' = V - V'' = \frac{1}{3}a^2h - \frac{\mu[1+\lambda(1+\lambda)(1+\mu)]}{6(1+\mu)(1+\lambda\mu)}a^2h = \frac{2(1+\mu)(1+\lambda\mu) - \mu[1+\lambda(1+\lambda)(1+\mu)]}{6(1+\mu)(1+\lambda\mu)}a^2h.$$

Тогава за отношението $\frac{V'}{V''} = \nu$ се получава $\nu = \frac{2(1+\mu)(1+\lambda\mu)}{\mu[1+\lambda(1+\lambda)(1+\mu)]} - 1$, т.е. $\nu = \frac{-\lambda^2\mu^2 - \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + \lambda\mu + \mu + 2}{\lambda^2\mu^2 + \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + \lambda\mu + \mu}$. От тази зависимост може да се изрази λ чрез μ и ν , а също μ чрез λ и ν .

По аналогичен начин, ползвайки схемата-модел на фиг.1, може да се търси и намира решение на задачи, които са частни случаи на дадената, каквито са например следните:

Задача 2. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основа $ABCD$ и връх M . Точка E дели външно отсечката BC , считано от B , в отношение $1:4$. През точките D и E е прекарана равнина, която пресича околния ръб MC в точка F и дели пирамидата на две части, отношението на обемите на които е равно на реципрочната стойност на отношението на дължините на ръбовете им, лежащи върху отсечката MC . Да се намери отношението $CF : MF$.

Задача 3. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основа $ABCD$ и връх M . През върха D и средата на околния ръб CM е прекарана равнина, която дели пирамидата на две равнообемни части. Да се намери отношението, в което пресечната точка на равнината и правата BC дели основния ръб BC , считано от B .

В горните задачи директно са посочени параметрите, между които трябва да се установи зависимостта (неизвестна за решаващия задачата). Такива задачи биха

били по-малко сложни, ако в тях се посочи съответната зависимост и се постави изискването тя да се докаже.

В заключение ще отбележим още, че разработеният модел с успех може да се прилага за търсене и откриване на решение не само на широк кръг стереометрични и планиметрични задачи за намиране и доказване на алгебрична зависимост, но и на сравнително по-сложни задачи, в които се изисква да се установи геометрично свойство, предполагащо изследване на зависимост между (непосочени в условието на задачата) параметри, които се явяват компоненти на неговия алгебричен модел. При много от тези задачи е възможно изискването им да се трансформира във вида: „Да се докаже дадена алгебрична зависимост между параметри, характеризиращи определена фигура“. Поради ограничения обем, демонстрация на прилагането на модела при работа с такива задачи, както и задачи, илюстриращи останалите варианти на модела, ще бъдат предмет на изследвания в други публикации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. ПОРТЕВ. Определеност (параметризация) на геометричните фигури и приложения. „Методи за решаване на задачи“, част I, Под научната ред. на доц. д-р В. Б. Милушев, П., Макрос 2001, 177–193.
- [2] Л. ПОРТЕВ. Параметризация на геометричните фигури и приложението ѝ в обучението по математика, Сб. „За някои въпроси на обучението по математика“, Съставил К. Петров, С., НП, 1980, 179–192.
- [3] К. СЛАВОВ, Сл. СЛАНОВА, Е. ЙОНОВА, Д. ИЗВОРСКА. Някои приложения на метода на параметризацията, I и II част, *Годишник на ФМИ на ШУ*, I, 1992, 40–63.
- [4] К. СЛАВОВ, Сл. СЛАНОВА. Параметризация на множества, *Годишник на ВПИ – Шумен*, IX Б, 1985, 59–77.
- [5] Л. М. ФРИДМАН. Теоретические основы методики обучения математике. (Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений), М., Московский психосоциальный институт, изд. „Флинта“, 1998.

Васил Борисов Милушев
ул. „П. Д. Петков“ 39
4000 Пловдив, България
e-mail: vmill@abv.bg

Димитър Георгиев Френкев
ул. „Деспот Слав“ 28
Смолян, България

A MODEL OF JOINT APPLICATION OF THE METHODS OF ANALYSIS, SYNTHESIS AND PARAMETRIZATION IN LOOKING FOR SOLUTIONS OF GEOMETRICAL PROBLEMS

Vassil B. Milloushev, Dimitar G. Frenkev

The process of joint application of the methods of analysis, synthesis and parametrization with supplementary parameters for the search of solutions of geometrical problems for finding out and proving properties is investigated. As a result, a schematic model for this process is elaborated.

The application of this model is illustrated on a stereometrical problem for finding out (and proving) a relationship between quantities, characterizing geometrical situation.