

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004
Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–4, 2004

СЪВПАДЕНИЕ ИЛИ ЗАКОНОМЕРНОСТ?

Милен Н. Найденов

В работата е разгледана една стереометрична задача, от която, чрез аналогия, са получени още четири задачи със същия отговор. Остава открит въпросът за връзка между така предложените пет задачи. Първите три от тях са подходящи за ученици от горния курс на ЕСПУ, а за останалите две са необходими знания от математическия анализ – по-точно приложение на интегралното смятане за пресмятане на обеми.

Повод за тази работа е следната задача, предложена в [1]:

Правилен тетраедър с ръбове равни на 1 е пресечен с равнина, успоредна на два срещуположни ръба. Да се докаже, че обемът на пирамидата с основа полученото сечение и връх в центъра на тетраедъра не надминава $\frac{1}{36\sqrt{3}}$.

За целите на настоящата статия, по-удобно е тази конкурсна задача да бъде преформулирана така:

Задача 1. *Правилен тетраедър има дължина на всички ръбове равна на a . Сечението на тетраедъра с равнина α , успоредна на два срещуположни ръба, служи за основа на пирамида, чийто връх е центърът на тетраедъра. Измежду всички такива пирамиди, основите на които лежат в равнини, успоредни на α , да се намери тази с най-голям обем, означен с V_M . Ако V обемът на дадения тетраедър, да се пресметне $V : V_M$.*

Това условие дава възможност да бъде формулирана и следната

Задача 2. *Сечението на кълбо с радиус R и равнината α служи за основа на конус, чийто връх е центърът на кълбото. Измежду всички такива конуси, чийто основи лежат в равнини, успоредни на α , да се намери конусът с най-голям обем, означен с V_M . Ако обемът на кълбото е означен с V , да се пресметне $V : V_M$.*

Решение: Нека кълбото с радиус R е пресечено от равнината α в кръг с радиус x и α е на разстояние h от центъра на кълбото. Тогава от Питагоровата теорема следва, че $h = \sqrt{R^2 - x^2}$ и обемът V_k на получения прав кръгов конус е $V_k = \frac{\pi}{3}x^2h = \frac{\pi}{3}x^2\sqrt{R^2 - x^2}$. От геометрични съображения е ясно, че за да съществува конусът, трябва $0 < x < R$. Получената функция се изследва с помощта на производни и се доказва, че при $x = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, тя има максимум, т.е. $V_M = \frac{2\pi}{27}R^3\sqrt{3}$. От тук веднага се пресмята търсеното отношение $V : V_M = \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{2\pi}{27}R^3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Изненадващо, при правилния октаедър се получи аналогично на Задача 1 следната

Задача 3. *Правилен октаедър $ABCDOS$ (точките $A - C$, $B - D$, $O - S$ са срещуположни върхове) има дължина на всички ръбове, равна на a . Сечението на октаедъра с равнина α , успоредна на ръба AB и оста OS служи за основа на пирамида, чийто връх е център на октаедъра. Измежду всички такива пирамиди, основите на които лежат в равнини, успоредни на α , да се намери тази с най-голям обем, означен с V_M . Ако обемът на дадения октаедър е означен с V , да се пресметне $V : V_M$.*

Интересен факт е, че отговорът на трите задачи е $6\sqrt{3}$ и той може да бъде получен със знанията, които дава средното училище. За решаването на следващите две задачи, обаче, са нужни и знания по интегрално смятане. Аналогична на задача 2 е следната

Задача 4. *Сечението на елипсоид с уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ спрямо координатна система $OXYZ$ и равнина α , перпендикулярна на оста OZ , е елипсата E . Получен е конус с основа частта от равнината α , ограничена от E и връх център на дадения елипсоид. Измежду всички такива конуси, основите на които лежат в равнини, успоредни на α , да се намери този с най-голям обем, означен с V_M . Ако обемът, ограничен от елипсоида, е означен с V , да се пресметне $V : V_M$.*

Отговорът на тази задача е отново $6\sqrt{3}$. Тези четири задачи, освен еднакъв отговор, като че ли имат „нещо общо“ във формулировката на условието. Случайно съвпадение ли е всичко това, или нещо се изпълзва от „погледа ни“? След дълги търсения, успяхме да съставим задача, в която по-голямото тяло с обем V не е между най-често изучавани (поне у нас) тела и въпреки това отговаря на аналогията, която спазва това изследване и това е следната

Задача 5. *Обемът на тялото, ограничено от повърхнините с уравнения $z^2 + x^2 = R^2$ и $z^2 + y^2 = R^2$ спрямо координатната система $OXYZ$, е означен с V . Сечението на това тяло с равнина α , перпендикулярна на оста OZ , служи за основа на пирамида, чийто връх е точка O . Измежду всички такива пирамиди, основите на които лежат в равнини, успоредни на α , да се намери тази с най-голям обем, който е означен с V_M . Да се пресметне $V : V_M$.*

Съставянето на задачи „по аналогия“ се оказва изключително трудно и това явно се дължи на факта, че понятието аналогия не е дефинирано точно и не е еднозначно, т.е. има различни аналогии и не всички са истинни (верни) по отношение на нашето изследване.

Може би поради това световно известният математик Дьорд Поля [2] казва: „Когато обаче започнем да разглеждаме аналогията, ние стъпваме на по-хлъзгава почва“.

Тази работа започна с една математическа задача от конкурса „Атанас Радев“, която видоизменена и обобщена постави проблем, който някъде трябваше да се решава с по-мощен математически апарат. Убедени сме, че има и други задачи, които да се вместят в разглежданата идея и ще сме много благодарни на всеки, който би предложил нещо в тази посока.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е. Енчев. Средношколски математически конкурс „Атанас Радев“, сп.Математика, бр. 6, 1980 г., 15–17.
[2] Д. Пойа. *Математиката и правдоподобните разсъждения*, том Първи, Индукция и аналогия в математиката, Народна просвета, София, 1970 г. 33.

Милен Найденов Найденов
ул. Сан Стефано 2
9000 Варна, България

COINCIDENCE OR REGULARITY?

Milen N. Naydenov

A stereometric problem is described in this paper. Four analogical problems with the same result are defined as a consequence. The question about the relations between the above mentioned five problems is still open.