

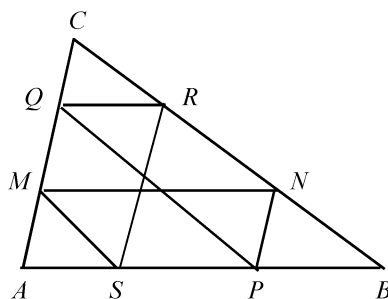
ЕДНА УСПОРЕДНА ТРАЕКТОРИЯ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Емил Я. Стоянов

В тази статия се разглежда един аналог на „Фигурата на Томзен“ за произволен четириъгълник.

На страниците на [1], а и не само там, можем да срещнем следното твърдение:

I. Ако M е произволна точка от страната AC на триъгълника ABC (Черт. 1) ($M \neq A$, $M \neq C$) и $MN \parallel AB$ ($N \in BC$), $NP \parallel AC$ ($P \in AB$), $PQ \parallel BC$ ($Q \in AC$), $QR \parallel AB$ ($R \in BC$) и $RS \parallel AC$ ($S \in AB$), то $SM \parallel BC$. (Ако M е средата на AC , то $N \equiv R$, $M \equiv Q$ и $P \equiv S$).



Черт. 1

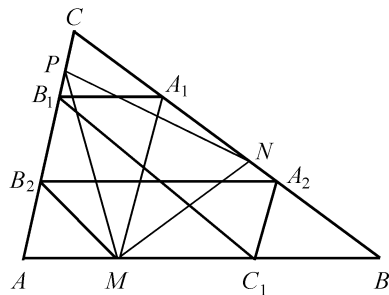
За да докажем твърдението е достатъчно да приложим няколко пъти теоремата на Талес, а именно $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{BP}{BA} = \frac{RQ}{BA} = \frac{AS}{BA}$ т.е. $\frac{AM}{AC} = \frac{AS}{BA}$ и от обратната теорема на теоремата на Талес получаваме $SM \parallel BC$. Съществено използвахме и факта, че четириъгълниците $ASRQ$ и $PBRQ$ са успоредници.

Така получената конфигурация е известна като „Фигура на Томзен“. Освен, че е един красив геометричен факт, фигурата може да намери приложение и при решаването на други задачи в съчетание с известните твърдения:

II. „Лицето на триъгълник, разположен в успоредник, не надминава половината от лицето на успоредника.“ и

III. „Лицето на успоредник, разположен в триъгълник, не надминава половината от лицето на триъгълника.“, фигурата на Томзен ни дава елегантно решение на следната задача от VIII MOM в София:

Задача. Ако точките M , N и P са съответно от страните AB , BC и CA на триъгълника ABC , то поне едно от лицата на триъгълниците MNB , NPC и PMA не надминава $\frac{1}{4}$ от лицето на ABC . (Черт. 2).



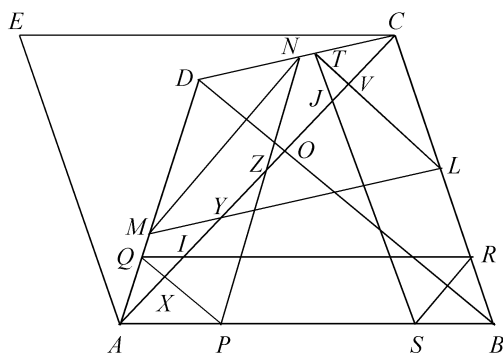
Черт. 2

Решение: Да построим фигурата на Томзен за точка M . Това е начупената линия $MA_1B_1C_1A_2B_2M$. Ако $P \in AB_1$, то триъгълникът AMP попада в успоредника MA_1B_1A и от твърдения II и III всичко е ясно.

Нека $P \in B_1C$. Тогава, ако $N \in CA_2$, то NPC се съдържа в успоредника $C_1A_2CB_1$, а ако $N \in BA_2$, то триъгълник MNB се съдържа в успоредника MA_2B_2 . С това задачата е решена.

Логично възниква въпросът: „Има ли подобна фигура за четириъгълник?“ Имайки предвид, че една от съществените разлики между триъгълник и четириъгълник е появата на два диагонала във втория, ще докажем следното твърдение:

IV. Ако четириъгълникът $ABCD$ е разположен в успоредника $ABCE$ (Черт. 3), а за произволна точка M от страната AD ($M \neq A$, $M \neq D$) построим начупената линия $MNPQRSTLM$ така, че $MN \parallel AC$ ($N \in CD$), $NP \parallel AD$ ($P \in AB$), $PQ \parallel BD$ ($Q \in AD$), $QR \parallel AB$ ($R \in BC$), $RS \parallel AC$ ($S \in AB$), $ST \parallel BC$ ($T \in CD$) и $TL \parallel BD$ ($L \in BC$), то $LM \parallel CD$.



Черт. 3

Начупената линия MNPQRSTLM ще наречем „траектория на т. M “. Първо ще докажем твърдението, когато разположението на точките от траекторията е точно както на чертежа, а след това ще поясним, че то наистина е такова. Ще приемем, че обхождаме траекторията от R към Q , а не от M към N и ще докажем, че $RS \parallel AC$. (Оставяме на читателя да съобрази, че това е равносилно на обхождането от M към N и доказването на $LM \parallel CD$).

Нека $AC \cap PQ = X$, $AC \cap ML = Y$, $AC \cap PN = Z$, $AC \cap TL = V$, $AC \cap BD = O$.
Тогавата $\frac{AX}{AZ} = \frac{QX}{XP} = \frac{DO}{OB}$, откъдето

$$(1) \quad AX = \frac{DO}{OB} \cdot ZA$$

Освен това $\frac{CV}{CY} = \frac{TV}{VL} = \frac{DO}{OB}$, откъдето

$$(2) \quad CV = \frac{DO}{OB} \cdot CY$$

От друга страна четириъгълниците $AZNM$ и $CYMN$ са успоредници, което с използване на (1) и (2) дава

$$(3) \quad AX = CV.$$

Ако $AC \cap RQ = I$ и $AC \cap TS = J$, то $\frac{AX}{XI} = \frac{QX}{XP} = \frac{DO}{OB} = \frac{TV}{VL} = \frac{CV}{VJ}$, т.е. $\frac{AX}{XI} = \frac{CV}{VJ}$ и от (3) получаваме

$$(4) \quad XI = VJ.$$

Сега от (3) и (4) $AI = AX + XI = CV + VJ = CJ$, т.е.

$$(5) \quad AI = CJ$$

Но $\frac{BS}{BA} = \frac{CJ}{CA}$ и $\frac{BR}{BC} = \frac{AI}{AC}$ и от (5) $\Rightarrow \frac{BS}{BA} = \frac{BR}{BC}$, откъдето от обратната теорема на Талес получаваме $RS \parallel AC$. С това твърдението е доказано. Ще отбележим, че при извеждането на (1), (2), (3), (4) и (5) съществено използвахме теоремата на Талес и подобни триъгълници.

Сега ще докажем, че за всеки четириъгълник съществува такава страна, че за произволна точка от нея траекторията от IV е точно с такова разположение на точките, както на черт. 3, а именно, по две на всяка страна на четириъгълника при положение, че тръгваме от точка M по посока на часовниковата стрелка (в случая с черт. 3 от AD към DC).

Първо да разгледаме четириъгълника $ABCD$ (Черт. 4) и нека $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$ и $\sphericalangle ADC = \delta$. Ще докажем, че винаги съществува точка E такава, че заедно с някои три от върховете на $ABCD$ да образуват успоредник, т.е. че четириъгълникът $ABCD$ е разположен в успоредник, както на черт. 3.

Ясно е, че ако $\alpha + \beta > 180^\circ$, $\beta + \gamma > 180^\circ$, $\gamma + \delta > 180^\circ$ и $\delta + \alpha > 180^\circ$, то събирайки еднопосочните неравенства ще получим $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 360^\circ$, което е невъзможно!

Следователно, без да ограничаваме общността, можем да предположим, че $\alpha + \beta \leq$

твърдение IV траектория, като първоначално тръгнем по посока на часовниковата стрелка, то след 7 отражения ще се върнем отново в първоначалното положение.

Остават открити въпросите ще се затвори ли кривата, ако тръгнем в обратна посока на часовниковата стрелка (на Черт. 3 $MN \parallel BD$, $N \in AB$), а също така има ли подобна фигура, ако не тръгнем от AD или CD , а от другите две страни. Авторът знае по-голямата част от отговорите на тези въпроси, но това би увеличило значително обема на настоящия материал.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. КОКСТЕР. Вечната геометрия, София, Наука и изкуство, 1979, 259 стр.

Емил Янков Стоянов

ул. „Княз Борис I“ 45, вх. Б, ет. 2, ап. 3

3700 Видин

e-mail: estoyanov@abv.bg

A PARALLEL TRAJECTORY IN A QUADRILATERAL

Emil Ya. Stoyanov

In this paper an analog of the Thomsen's figure for a quadrilateral is constructed.