

ЗАДАЧИ ОТ ЕКСТРЕМУМИ, ПРИ РЕШАВАНЕТО НА КОИТО СЕ ИЗПОЛЗВАТ СТРУКТУРНИ СВОЙСТВА НА ЧИСЛОВИ МНОЖЕСТВА*

Димитър Г. Френкев, Васил Б. Милушев

Мотивирано е регулярното използване на структурните свойства на числовите множества при решаване на разнообразни алгебрични задачи. Тази идея е реализирана в специално подбрани или конструирани задачи за намиране екстремуми на функции.

При третирането на въпроса за задълбоченото, съзнателно изучаване на основните числови множества, авторите на [1] разглеждат знанията на учениците на следните две равнища:

* операционно равнище — ученикът притежава знания и умения за извършване на операциите с числата от съответното множество, но може и да не знае неговите свойства;

* структурно равнище — освен, че може да извършва операциите с числа от основното числово множество, ученикът знае и свойствата, характеризиращи неговата структура:

- ограниченост отдолу и неограниченост отгоре на естествените числа, а също и на неотрицателните рационални или реални числа, както и неограниченост отдолу и ограниченост отгоре на неположителните цели, рационални или реални числа;
- дискретност на целите числа;
- изброимост и плътност на рационалните числа;
- плътност и непрекъснатост на реалните числа;
- линейна наредба на основно числово множество;
- „затвореност“ относно изучавани операции на основно числово множество.

Учебната документация за средното училище отрежда приоритетно място на знанията на учениците на операционно равнище. Все пак „много добре ще е, ако в края на обучението в средното училище учениците имат и структурни знания за числовите множества“ [1, с. 143]

Нашият опит показва, че това становище с още по-голяма сила се отнася за онези ученици, които ще се обучават в последствие за начални учители или за учители по математика за средното училище.

Същевременно ще отбележим, че учебните програми по математика предвиждат темата „Числа“ да се изучава от първия до последния клас, като паралелно с това се

*Изследванията са направени с финансовото съдействие на фонд НИ при ПУ. Договор 03-П-58.

„вмъкват“ други теми от алгебрата – уравнения, неравенства, системи, функции и т.н. Тази разтегнатост и разпокъсаност в изучаването на основните числови множества не позволява учениците да схванат знанията за структурно-характеризиращите ги свойства като съществени. С оглед създаване на условия за преодоляване на тези недостатъци, считаме за целесъобразно регулярно да се използват тези свойства като на дедуктивни правила при търсене решения на задачи от уравнения, неравенства, функции и др.

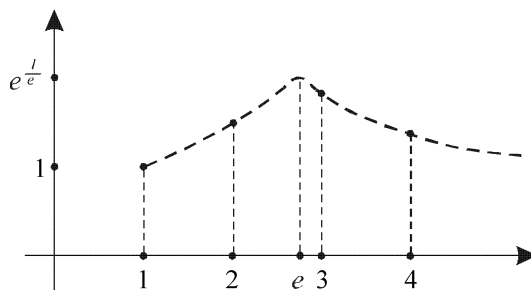
В настоящата статия ще покажем как може да се реализира тази идея при прилагане на метода обобщение за търсене и откриване решения на задачи от екстремуми на функции. Както показва опитът ни, един от мотивите за използване метода обобщение е фактът, че за голяма част от обобщените задачи съществуват много повече дедуктивни правила, които могат да се прилагат за решаването им, отколкото за техните частни случаи. Един от начините за обобщаване на задачи от числови или съждителни функции (уравнения, неравенства и т.н.) е „разширяване“ на техните дефиниционни области.

Ще демонстрираме казаното с пример.

Задача 1. Да се намери най-голямата стойност на $\sqrt[n]{n}$, където n е естествено число.

Търси се екстремум на функция с естествен аргумент, за която учениците не могат да приложат известните начини за намиране на екстремуми с помощта на производни. Може, обаче, $\sqrt[n]{n}$ да се означае с $x^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{N}$, и да се обсъдят възможностите за намиране на екстремумите на „по-общата“ функция $y = x^{\frac{1}{x}}$, където x е произволно реално положително число. Един от известните начини за това е чрез изследване на интервалите на монотонност на $y = x^{\frac{1}{x}}$, което може да стане с помощта на производни по следния начин: $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$; $\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x$; $y' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$.

Известно е, че ако $x > 0$, то $x^{\frac{1}{x}} > 0$. Очевидно знакът на y' зависи от знака на $1 - \ln x$. Понеже $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow e > x$, то при $x < e$ имаме $y' > 0$ и следователно y е строго растяща функция, а при $x > e$ е изпълнено $y' < 0$ и значи y е строго намаляваща функция. Но тогава при $x = e$ функцията y има максимум, равен на $e^{\frac{1}{e}}$. Този резултат нагледно може да се представи чрез графика, както е показано на фиг. 1. От тази графика се вижда, че, понеже $e \approx 2,72$, то най-голямата стойност на $n^{\frac{1}{n}}$ при n естествено число се получава или за $n = 2$, или за $n = 3$. Остава да се сравнят $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$. За целта представяме числата чрез радикали с еднакъв коренен показател: $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ и $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$. Сега е очевидно, че най-голямата стойност на $\sqrt[n]{n}$ е $\sqrt[3]{3}$.



Намирането на екстремума на функцията $y = x^{\frac{1}{x}}$ може да се осъществи (макар и по-сложно) с помощта на втората ѝ производна по следния начин:

$$y' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e;$$

$$y'' = y' \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x) + y \left(-\frac{1}{x^4} \cdot 2x \right) (1 - \ln x) + y \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{x} \right);$$

$$y'' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^4} \left((1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x) - x \right).$$

За $x = e$ $y'' = -e^{1/e} \cdot \frac{1}{e^3} < 0$, т.е. при $x = e$ функцията $y = e^{\frac{1}{e}}$ има максимум $y = e^{\frac{1}{e}}$.

Изследването на „по-общата“ функция $y = x^{\frac{1}{x}}$ може да се реализира при работа с по-напреднали по математика ученици.

Във връзка с „поддържане“ знанията на учениците за структурните свойства на основните числови множества, в етапа „поглед назад“ (по Д. Поля) може естествено да се постави пред тях и допълнителният въпрос: „А има ли $\sqrt[n]{n}$ най-голяма стойност когато n не е цяло, но е рационално число?“

Ученици, които добре осъзнават структурните свойства, свързани с разпределението на рационалните и ирационалните числа и гъстотата на множеството на реалните числа (например няма „съседни“ реални числа, били те рационални, ирационални или едното от тях рационално, а другото ирационално), директно могат да дадат отрицателен отговор на горния въпрос. Строгата обосновка на този отговор обаче включва следните разсъждения.

Да допуснем, че $n^{\frac{1}{n}}$ има най-голяма стойност за $n = p \in \mathbb{Q}$, като $2 < p < e$ или $e < p < 3$ (тъй като числото e е ирационално, то $e \neq p$). Нека за определеност $p < e$ (аналогично се разсъждава и когато $p > e$). Тогава между p и e има безбройно много, както рационални, така и ирационални числа и нека q е едно от тези рационални числа. От $p < q < e$ и от това, че функцията $y = x^{\frac{1}{x}}$ е растяща за $0 < x < e$ следва, че $p^{\frac{1}{p}} < q^{\frac{1}{q}}$, което противоречи на допускането, че $p^{\frac{1}{p}}$ е най-голямата стойност на $n^{\frac{1}{n}}$. Полученото противоречие се дължи на допускането, че $n^{\frac{1}{n}}$ има най-голяма стойност, когато n не е цяло, но е рационално число. Следователно $n^{\frac{1}{n}}$ няма най-голяма стойност при $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Възможно е някои понятия и свързани с тях дедуктивни правила, необходими за решаване на обобщената задача, все още да не са изучавани от учениците. Общата идея за откриване на решение на обобщената задача по принцип е известна, но в този случай тя не може да се реализира. Тогава идеята може да се конкретизира за изходната задача и да се търсят други, нетрадиционни методи и средства за осъществяването ѝ. Така например, ако задача 1. се разглежда с ученици, които не са изучавали натурални логаритми и свързаните с тях правила за диференциране, може да се постави въпросът за намиране екстремума на функцията $y = x^{\frac{1}{x}}$ в общия теоретичен план и да се стигне до идеята, че трябва и за функцията $y = \sqrt[n]{n}$ да се намери в кои интервали тя расте и в кои намалява. След като на този етап на обучение не може да се отговори на този въпрос с помощта на производни, то трябва да се издирят по-елементарни, нетрадиционни средства за изследване монотонността на „по-простата“ функция $\sqrt[n]{n}$. За целта си поставяме нова задача:

„Да се намери при кои естествени стойности на n е изпълнено $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n+1]{n+1}$ и

при кои - $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$.

По-лесно ще сравним $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[n+1]{n+1}$, когато ги приведем към радикали с еднакъв коренен показател: $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}}$ и $\sqrt[n+1]{n+1} = \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}$.

Сега трябва да сравним n^{n+1} и $(n+1)^n$. Това може да стане като сравним частното им с числото 1. За целта извършваме следните преобразувания:

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

За $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имаме

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

За „общия“ израз-събираемо правим следната оценка:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

Така получихме, че $\frac{(n+1)}{n^{n+1}} < \frac{3}{n}$ и следователно за всяко n , за което $\frac{3}{n} \leq 1$ (т.е. $n \geq 3$), имаме $(n+1)^n < n^{n+1}$. Това означава, че при $n \geq 3$ функцията $\sqrt[n]{n}$ е намаляваща, т.е. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \dots$.

От друга страна, лесно се проверява, че $\sqrt[4]{1} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. Следователно най-голямата стойност на $\sqrt[n]{n}$ при естествено число n е $\sqrt[3]{3}$.

Идеята за регулярно използване на структурни свойства на основни числови множества би могла да се осъществява и с помощта на подходящи задачи от екстремуми на функции, взети от действащите учебни пособия, като:

1) в етапа „поглед назад“, от дейността решаване на разглежданата задача, се варира дефиниционната област на съответната функция така, че да се обхванат различните основни числови множества;

2) учителят преформулира и поставя на учениците получената нова задача в следния вид:

2.1. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = f(n)$, където n е цяло (или естествено) число.

2.2. Дадена е функцията $y = f(x)$, определена в множеството D . Да се изследват локалните (или абсолютните) екстремуми на функцията, ако D е подмножество на

множеството на: а) реалните числа; б) рационалните числа; в) ирационалните числа.

По този начин, на определен по-късен етап от обучението, може да се повиши формирацият потенциал на подходящи задачи от учебните пособия, което подобрява ефективността на обучението. Ще покажем това със следния пример.

Задача 2. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = 10 - 9 \sin^2 x$ [2, с. 19].

Първи начин. След решаването на задачата (с използване на производна или ограничеността на функцията $\sin^2 x$), в етапа „Поглед назад“, учителят може да предложи следната задача: „Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = 10 - 9 \sin^2 x$, ако: а) x принадлежи на множеството на рационалните числа; б) x принадлежи на множеството на ирационалните числа.“

Втори начин. Учителят дава на учениците следните задачи (получени чрез преформулиране на задача 2).

Задача 2'. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на $10 - 9 \sin^2 n$, където n е цяло число.

Задача 2''. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = 10 - 9 \sin^2 x$, ако x е: а) реално число; б) рационално число; в) ирационално число.

Задача 2' може да се реши чрез обобщаване, както бе решена задача 1. Ще представим накратко решението на задача 2''.

а) Нека x е реално число. Като се използва ограничеността на функцията $\sin x$, се получават последователно следните неравенства

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -9 \sin^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 10 - 9 \sin^2 x \leq 10.$$

Оттук следва, че най-голямата стойност на функцията y е 10, която се получава при $x = k\pi$, а най-малката стойност е 1, при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Забележка: До същия резултат се достига и като се използва производна на функцията.

б) Нека x е рационално число (то е цяло или нецяло). Забелязваме, че при $k = 0$ се получава, че за $x = 0$ функцията y има най-голяма стойност 10. Тази най-голяма стойност се достига само за цялото число $x = 0$, тъй като за всяко $k \neq 0$ числото $x = k\pi$ не е рационално. Оттук и от изследванията в а) следва, че най-голямата си стойност 10 функцията y достига само за рационалното число $x = 0$.

Очевидно, за всяка цяла стойност на k числото $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ не е рационално. Да допуснем, че има такова рационално число p , че при $x = p$ функцията y достига най-малката си стойност. Ясно е, че $p \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ за всяко $k \in \mathbb{Z}$. За определеност да приемем, че съществува такова число k_0 , че $\frac{\pi}{2} + (k_0 - 1)\pi < p < \frac{\pi}{2} + k_0\pi$. Аналогично се разсъждава и когато $\frac{\pi}{2} + k_0\pi < p < \frac{\pi}{2} + (k_0 + 1)\pi$. Поради свойството „гъстота“, съществува такова рационално число q , че $p < q < \frac{\pi}{2} + k_0\pi$. Тъй като в интервала $\left[\frac{\pi}{2} + (k_0 - 1)\pi; \frac{\pi}{2} + k_0\pi\right]$ функцията y намалява, то $y(p) > y(q)$. Това обаче противоречи на допускането, че за $x = p$ функцията y достига най-малката си стойност. Следователно функцията y няма най-малка стойност, когато x е рационално число.

в) Нека x е ирационално число. Лесно се съобразява, че сега най-голямата стойност на функцията y е 10 за $x = k\pi$, където $k \neq 0$ е цяло число, а най-малката стойност е 1 за $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

В заключение ще отбележим, че предложената в статията идея за търсене екстремуми на функции, дефинирани в различни основни числови множества, от една страна, улеснява процеса на овладяване на структурните им свойства, а от друга – съдейства за повишаване качеството на обучението чрез задачи, имащи сравнително по-висок формиращ потенциал (изискващи използване на обобщение, сравнение, преформулиране, съставяне на нови задачи и пр.).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. ГАНЧЕВ и др. Методика на обучението по математика 5.-7. клас. Изд. „Макрос 2000“, Пловдив, 1997.
- [2] Л. ПОРТЕВ, ИВ. ИВАНОВ, Р. МАВРОВА, В. МИЛУШЕВ, Й. НИКОЛОВ, ХР. ПАВЛОВ, А. ПОРТЕВА, А. САЛИЕВ. Математика. Учебно помагало за държавен зрелостен изпит. Част IV. Изд. „Летера“, Пловдив, 2003.

Димитър Георгиев Френкев
ул. „Деспот Слав“ 28
гр. Смолян

Васил Борисов Милушев
ул. „П. Д. Петков“ 39
гр. Пловдив
e-mail: vmill@abv.bg

PROBLEMS ON EXTREMA WHOSE SOLUTIONS INVOLVE STRUCTURAL PROPERTIES OF NUMERICAL SETS

Dimitar G. Frenkev, Vasil B. Milloushev

A regular use of the structural properties of numerical sets for solving various algebraic problems is motivated. This idea is realized in problems, chosen or constructed, related to extrema of functions.