

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2005
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2005
Proceedings of the Thirty Fourth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 6–9, 2005

**ИНСТРУМЕНТАРИУМ ЗА ОТКРИВАНЕ И ПОДКРЕПА
НА ИЗЯВЕНИ УЧЕНИЦИ ПО МАТЕМАТИКА**

Сава Гроздев, Петър Кендеров

В статията се разглеждат някои основни идеи в разработките, които се реализират от партньорите в европейския проект “МАТНЕУ: откриване, мотивиране и подкрепа на математическите таланти в европейските училища”. Проектът се подкрепя финансово от Европейския съюз (програма “Сократес”).

1. Увод. Реализацията на проекта “МАТНЕУ: откриване, мотивиране и подкрепа на математическите таланти в европейските училища” започна на 1 октомври 2003 г. и тригодишният срок за изпълнение изтича през следващата година. Основните характеристики на проекта са представени в [1], като в списъка на партниращите държави е осъществена промяна. От началото на 2005 г. на мястото на Великобритания се включи Унгария посредством Университета в гр. Мишколц. Този университет е с над 50-годишна история и е областен академичен център на Североизточна Унгария. В него се обучават около 15 000 студенти, а преподавателският и техническият състав е около 2000 души. Университетът разполага с 3 факултета по технически науки и с още 3 по хуманитарни. Има също 2 колежа, единият от които е за обучение на учители, а другият е Музикалното училище “Бела Барток”. Координатор на проекта от унгарска страна е проф. Петер Кортеси. Той е един от най-активните организатори на младежките научни конгреси, които се провеждат традиционно в Университета в гр. Мишколц и по време на които изявени ученици и студенти представят собствени научни разработки в областта на математиката. Този факт е основен при избора на новия партньор, защото целта на проекта МАТНЕУ е разработване на образователни средства както за изявяващите се в математически олимпиади и състезания, така и за даровитите млади хора, които притежават подчертана способност към генериране на нови идеи и проявяват творчество при разработването на научно-изследователски проекти.

Понастоящем тече решителната втора година от изпълнението на проекта МАТНЕУ. До този момент е осъществено задълбочено изследване на учебното съдържание по математика в училищата на партниращите държави, в т. ч. и съдържанието, предназначено за изявени ученици. На базата на сравнителен анализ са определени две основни нива на обучение. Първото ниво обхваща учениците от 9 до 14 години, а второто – съответно тези от 15 до 19 години. Всяко от нивата е осигурено с подходяща тематика, основните елементи на която са в довършителна фаза. Става дума за системи от задачи, групирани по теми, които реализират инструментариум за откриване, мотивиране и подпомагане на талантиливи ученици по

математика в процеса на тяхното развитие и усъвършенстване. Основната целева група, която се предвижда да ползва инструментариума, са учителите. Разчита се, че след преминаване на съответно обучение те ще се превърнат в решаващ фактор за създаване на условия, при които показаните математически способности техни ученици ще бъдат предразположени, за да достигнат възможно по-високи нива на математическо разбиране и в същото време ще бъдат подкрепени да развият теоретичното си мислене. По-напредналите ученици също ще могат да използват части от инструментариума.

2. Учителите и тяхната квалификация. Съществената роля, която по проекта се пада на учителите, поставя редица изисквания към тях. На първо място е математическата им компетентност. Добре известно е, че е трудно да се разчита на сериозни резултати в обучението по математика, ако тези, които осъществяват това обучение, не са можещи и добре подготвени математици. Важността на проблема се отчита от много държави. Ще си послужим с два примера.

Добре известно е международното изследване TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) върху обучението по математика и природни науки, ръководено от Международната асоциация за оценка на постиженията в образованието IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Резултатите от TIMSS през 1999 г. показаха влошаване на постиженията по математика в израелските начални училищни класове. По този повод Министерството на образованието в Израел назначи специален комитет за установяване на причините и изработване на мерки за справяне с изоставането. Едно от основните заключения на комитета е, че учителите в началните училища не притежават математически познания в достатъчна степен. Израелската система (както и българската) е такава, че обучението се осъществява от един човек по всички предмети. Ето защо, с малки изключения учителите в началното училище не са професионални математици и математическата им подготовка е незадоволителна. Препоръката на споменатия комитет е радикална: още от първи клас предметът “математика” трябва да се преподава от професионалисти. Министерството на образованието в Израел възприе препоръката и задължи всички начални учители да преминат 3-годишен специализиран курс на обучение. В програмата е включено задълбочено изучаване на елементарна математика и избрани глави от висшата, като ударението е върху методиката и дидактиката. Ежегодно около 70 души завършват курса, който от 2004 г. е съкратен на две години. Специфичното на осъществяваната квалификация е, че участниците в нея са действащи учители. Наличието на учителски опит се оказва полезно при усвояване на преподавания материал и резултатите от финалните изпити са високи. Обнадеждаващи са също и резултатите на учениците, чиито учители са преминали специализирания курс на обучение.

Подобен пример е свързан и с Норвегия. Норвежкото правителство лансира план за периода 2002–2007 година за засилване на образованието по математика и природните науки. В частност беше приета стратегия за качеството на обучението по математика в столицата Осло, съгласно която до края на 2006 г. във всички класни стаи на 175 училища трябва да се почувства значително повишаване на математическата култура на учениците. Реализацията на стратегията минава през съответно квалифициране на учителите. При това се визира не само началният курс, но съ-

що така средният и горният. В Осло вече са създадени 12 мрежи, всяка от които включва по около 15 училища. В рамките на една мрежа и един учебен срок се организират редовно по 4 едноседмични занятия, на които училищата са представени от по двама учители по математика. Участващите учители следват 4-годишна програма на обучение, чиято цел е обмяна на опит и придобиване на знания за издигане на преподавателските умения и качеството на възприемане на математическото съдържание във всяка класна стая. Дватама учители трансферират наученото сред колегите в собственото си училище. Разчита се на ефекта “пръстени във водата”, които се генерират например при хвърляне на камък във воден басейн. По този начин училищата се превръщат в истински математически лаборатории и процесът на израстване в математическо отношение е колективен. Обратната връзка се осъществява с помощта на състезания между училищата-лаборатории, чрез които се проверява дали всички учители по математика в дадено училище са достигнали нужното ниво на квалификация. Получената информация става достойствие на заинтересованите и на цялата общественост посредством специализирано издание, което излиза 4 пъти годишно.

Проблемите на партниращите държави по проекта MATHEU са аналогични на тези в Израел и Норвегия. Специално за България са известни неотдавнашните критики на Световната банка за липсата на висококвалифицирани педагогически кадри и като цяло влошеното качество на образователния процес у нас. В подкрепа на тезата се цитират данни от изследването TIMSS през 2003 г., които нареждат българските ученици на незавидното 24-то място по природни науки и на 25-то място по математика сред връстниците им от 46 страни. В същото време не бива да се забравя световната отборна титла на България и извоюваните 6 златни медала по време на Международната олимпиада по математика в Япония през същата тази 2003 г. Първото впечатление е за някаква грешка или необяснимо противоречие. Да се обърнем към TIMSS. Това авторитетно изследване на Бостънския колеж, което (както беше отбелязано по-горе) се ръководи от IEA и чиито резултати се използват от такива световни организации като UNESCO, се провежда на всеки 4 години и обхваща 15-годишни ученици (осмокласници). През 1995 г. данните сочат, че България е на 5-то място по природни науки и на 9-то по математика, докато през 1999 г. в двете класации сме вече съответно на 16-то и 17-то място. По спад през 2003 г. България е на първо място в света. Държавите, които участват в изследването са: Австралия, Англия, Армения, Бахрейн, Белгия, Ботсвана, България, Гана, Египет, Естония, Израел, Индонезия, Иран, Италия, Йордания, Кипър, Корея, Латвия, Либия, Литва, Македония, Малайзия, Мароко, Молдова, Нова Зеландия, Норвегия, Палестина, Румъния, Русия, САЩ, Саудитска Арабия, Сингапур, Словакия, Словения, Сърбия, Тайван, Тунис, Унгария, Филипини, Холандия, Хонг Конг, Чили, Швеция, Шотландия, Южна Африка и Япония. В TIMSS'2003 България участва с 4117 осмокласници от 164 училища (но например без Софийска математическа гимназия).

Чиновниците бият тревога, че основният проблем бил липсата на компютри в училищата. Числата обаче сочат, че през последните години достъпът до компютри се е увеличил значително. Вече 40% от българските деца влизат в Интернет и прекарват в световната мрежа средно по 1 час на ден. Връстниците им от Италия и Япония прекарват по 0,6 ч. дневно, а тези от Латвия например – по 0,8 ч. Но

Италия, Япония и Латвия са преди България според резултатите на TIMSS. В класирането по точки от международните олимпиади по математика е обратното: за периода 1999–2003 г. България е на 3-то място след Китай и Русия, докато Япония е на 12-то, а Италия и Латвия са извън първите 40. И ако все пак не всичко с компютрите е напълно наред, основното в привидното противоречие е, че в сферата на математическите олимпиади и състезания традициите у нас да се работи с младите хора се запазиха. Именно работата с най-добрите, а не толкова, защото раждаме гениални математици. Като цяло обаче България губи способността си да стимулира и развива учениците с таланти. Затова надеждите, които залагаме на проекта МАТНЕУ, са големи.

Причините за спада в образованието у нас едва ли имат много общо с липсата на компютри. Значително по-важна е подготвеността на учителите и тяхното мотивирано отношение към задачите, които обществото им възлага и които те са призвани да изпълняват. За да спечели един ученик медал от международна олимпиада, е нужна мотивация за целенасочена и дългогодишна подготовка. Зад мотивирания ученик стои мотивиран учител, а за да бъде такъв, учителят трябва да бъде надеждно стимулиран. В това направление в България има определени традиции. Ще споменем ежегодните награди на Съюза на учителите в България и тези на Международната фондация “Св. Св. Кирил и Методий”. От 1994 г. насам, всяка година по време на пролетните конференции на Съюза на математиците в България, Международната фондация “Св. Св. Кирил и Методий” присъжда награди на учители за постижения на техни ученици през последните 5 години в международни, национални и регионални състезания. Под внимание се взимат също публикациите на кандидатите и техните ученици, изяви им в научни и методически форуми, семинари, ученически конференции и др. В областта на математиката лауреати на фондацията досега са били: Иван Симеонов от София (през 1994 г. и специална награда през 2003 г. за целокупни успехи през последните 15 години), Пламен Пенчев от Добрич (през 1995 г.), Румяна Караджова от София (през 1997 г. и 2003 г.), Ирина Шаркова (през 1998 г. и 2004 г.), Боянка Савова от София (през 1998 г.), Светлозар Дойчев от Стара Загора (през 1999 г.), Слави Харалампиев от Враца (през 1999 г.), Мария Атанасова от Габрово (през 2000 г.), Линка Минчева от София (през 2001 г.), Таня Стоева от София (през 2001 г.) и Велико Колев от София (през 2002 г.). Всички те са постигнали най-трудното в учителската професия – да се открие талантът, да се изградят качествата му и да се осигури неговото развитие и съхранение.

Изброените учители успяват до такава степен да активизират възпитаниците си, че часовете им се превръщат в истински занятия, типични за семинарите в научните институти. Много често учениците се готвят предварително по теми, зададени от учителя, проучват литература, решават задачи, поставят проблеми, разказват за наученото, споделят го с останалите и всички заедно напредват в овладяването на математиката. Резултатите не закъсняват. В периода 1992 – 1994 г. например в националния отбор по математика участваха трима ученици от един и същи клас (класен ръководител Иван Симеонов), като тримата спечелиха общо над 10 медала от балкански и международни олимпиади, а в периода 1997–2004 г. класовете на Румяна Караджова и Ирина Шаркова (Софийска математическа гимназия) извоюваха общо над 200 медала и купи от национални и международни състезания по математика.

За успеха на един учител са съществени редица качества, в т. ч. неговият опит, неговата осведоменост и ерудиция. Над всичко обаче е степента на математическата му култура. Съдържанието на споменатите по-горе стратегии на правителствата на Израел и Норвегия не е случайно. Подобна стратегия би трябвало да очакваме и от българското Министерство на образованието и науката, която заедно с широко пропагандираната и вече напредваща компютъризация на училищата да успее да съхрани положителното в българското образование, да го развие и да върне позициите му. Категоризирането на знанията на учителя в 7 части, съдържащо се в разработката на Ли Шулман [2], включва 3, които експлицитно фокусират върху професионалните качества: познаване на предмета “математика”, познаване на педагогическия инструментариум и познаване на учебното съдържание. Първата се състои в активното взаимодействие между индивидуалното знание (ключови факти, понятия, принципи и характерни за предмета обяснителни рамки) и синтактично-то знание (природата на търсенето в областта и как новото знание се представя и приема от съответното професионално общество). Втората част, отнасяща се до методиката на преподаване, е трудна за описание и дефиниране. Най-общо казано, тя прави връзката и определя разликата между това да знаеш нещо (например дадена математическа закономерност) и способността да осигуриш възможност на другите да го научат. Педагогическият инструментариум се състои в “средства за представяне на предмета по начин, който е разбираем за обучавания” [2, с. 9] и предполага “разбиране на онези особености, които правят процеса на усвояване на специфичните тънкости лесен или труден” (пак там). Най-достъпна в категоризацията на Шулман е третата част и за съжаление голям брой учители от партниращите държави (за България става дума за болшинството) се задоволяват само с нея. Тя включва обхвата и последователността на учебната програма, както и използвания в нея материал.

Участието на България в проекта MATH EU посредством Института по математика и информатика на БАН означава категорично, че българските учени-математици сме наясно с очертаната по-горе тенденция и убедено защитаваме необходимостта от съживяване на традициите, за да бъде активирана и доразвита на масово равнище способността за окриване и стимулиране на млади математически таланти. Добре известни са трите основни функции на образованието. Първата е свързана с предаване на генетическия код на обществото, когато подрастващото поколение възприема установените морални и етични норми. Втората функция касае масовата подготовка и квалификация по отношение на определени професионални стандарти. Третата е подготовката на елит, т.е. на онези, които след време са призвани да поемат отговорността за стратегически решения и лидерски позиции в различните области. Отказване от последната функция означава приемане на модел, близък до португалския. А не е тайна, че нивото на образование в Португалия е ниско и именно този факт в доклад от 26 януари 2005 г. е посочен от Европейската комисия като основен фактор за ниската производителност на труда там. Няма причини да се стремим към португалските стандарти. Далеч по-добре би било да следваме опита на Финландия, защото във финландския модел се учи и без да е задължителен например английският език и около 94% от населението го изучава интензивно. Затова пък Финландия притежава в момента развита индустрия и брутният вътрешен продукт на човек от населението е равен на британския.

3. Учениците и разпознаване на талантливите. Както отбелязахме по-горе, основната целева група на проекта МАТНЕУ са учителите, а успешната реализация на развиваните идеи в проекта зависят от тяхната подготвеност и квалификация. В крайна сметка именно на учителите се разчита при откриването и подкрепата на изявени ученици по математика. Не става дума за гениални математици, а за всички онези, които имат желание и притежават способности за напредване в математиката. Според Любен Десев [3, с. 546] способностите са “ансамбъл от природно и социално обусловени индивидуални... психически особености или свойства, които отличават един човек от друг, осигуряват му условия за успех и високи количествено-качествени постижения в една или няколко дейности”.

Тази дефиниция ни се струва подходяща и точна. В нея правят впечатление няколко съществени елемента. На първо място това е, че природната даденост се включва в способността и има характер на заложба. Следователно заложбата е предпоставка за способността. Тя е необходимо условие, но както ще видим, не е достатъчно. На второ място в дефиницията на Десев изпъква потенциалният характер на способността. С други думи, способността осигурява само възможност и готовност за високо постижение, като няма никакви гаранции, че това високо постижение ще бъде осъществено. В тази връзка считаме за важно да добавим, че способността би следвало да се разглежда в развитие. Един ученик може да има дадености, склонности, заложи за успешно напредване в математиката, но ако даденостите не се развият, той не може да постигне резултати. Веднъж открита, математическата способност подлежи на методично обогатяване и развитие. При това проявата и реализацията на високо ниво е в зависимост от емоционално-волевата сфера. Заложбата може да е налице, но ако липсва потребност, ако няма мотивация и активност, до развиване на математическа способност, до постижения може и да не се стигне. Следователно заложбата не е достатъчно условие за успех.

Една голяма част от подрастващите боравят сръчно и бързо с числа, справят се с аритметични операции, притежават чувство за аналогия и абстракция. При друга част обаче подобни възможности се забелязват трудно. Няма да се спираме на различните теории, които обясняват този феномен, включително и на съществуващите изследвания за локализиране на математическите способности в едното от двете полукълба на човешкия мозък. Въпросът за това по какво се отличават способните, талантливите от обикновените, “нормалните”, както и на какво се дължат различията, е занимавал в продължение на много години психолози, педагози и изследователи от други области. Разнообразието е огромно – като се започне от Платон, според когото вроденият характер на способностите е водещ, премине се през идеите на Джон Лок и Йохан Песталоци, първият от които отрича наследствените заложи и издига ролята на възпитанието, а вторият набляга на възможностите за развитие на природните дадености, та се стигне до руските революционни демократи, според които заложиите и възпитанието са еднакво важни. Тезата на партньорите по проекта МАТНЕУ е, че заложбата (генетичната програма) не трябва да се абсолютизира. Всеки ученик, независимо от природните дадености, трябва да бъде обграден с внимание и да получи своя шанс. При наличие на трудолюбие, желание, воля и целеустременост, вероятността за постигане на резултати е голяма. В тази връзка ще изтъкнем още веднъж ролята на учителя в училище. Една от неговите мисии е да направи така, че учениците да подхождат с желание към

преподавания материал, да изпитват към математиката (и не само към нея) любов, а не омраза. Положителните емоции от дадена дейност (например решаването на задачи) са необходима предпоставка за развитие на способността да се упражнява тази дейност. Емоционалният заряд и целеустремеността са катализатори както за изживяната на способностите, така и за тяхното развитие.

Като говорим за способности, имаме предвид математическите способности. Според В. Крутецки [4] математическите способности включват: способност за формализация и абстрахиране; способност за обобщение; способност за боравене с числа и символи; способност за извършване на разсъждения във връзка с доказателства и изводи; способност за обръщане на мисловния процес; способност за бърз преход от една операция към друга; способност за помнене; способност за пространствена представа. Други автори свързват математическите способности с много фина техника за разпознаване на образи, логическо съобразяване и съобразяване по аналогия. Дьорд Поия [5] и Ж. Голдин [6, с. 303 – 306] също изтъкват важността на процеса на запомняне у ученика, като подчертават, че помненето е изключително мощно средство за постигане на успех при изучаване на математика, но в същото време отбелязват, че понякога то може да се превърне и в препятствие.

Ще се спрем на способностите за оригинално и продуктивно мислене, които според Е. Нецка [7, с. 131 – 140.] се разделят на пет вида. Съществуват разделения и у други автори, някои от които са по-детайлни, но разликите са несъществени. Първият вид способности според Нецка са *асоциативните*, благодарение на които става свързване на отдалечени идеи.

Вторият вид са *аналоговите* способности. Аналоговият трансфер например на решения от една задача към друга е широко прието средство за творчество специално в науката и технологиите. Някои автори дори го абсолютизират [8]. Разбира се, елементарното разпознаване на аналогия между две задачи все още не означава откритие и математическа способност. Според Нецка аналогията трябва да бъде разбрана, усъвършенствана и даже трансферирана, за да може да се открият отдалечени подобия. В противен случай става регистриране на директни аналогови връзки, които са твърде очевидни, за да се окажат наистина продуктивни.

Третият вид способности според Нецка са *метафоричните*. Използването на метафора означава референция за даден обект чрез термините на друг обект. Евристичната употреба на метафори изисква те да бъдат пълни с въображение, но не задължително и с точност. При това метафоричното мислене, което е свързано с физиогномичното възприятие [9], играе съществена роля не само в поезията и изищните изкуства, но и във всяка друга област на творчеството. Това е така, защото метафората може да служи както за инструмент, така и за форма на творческия резултат.

Четвъртият вид способности са *трансформационните*. Те се отнасят до мислената промяна на даден обект в напълно различен друг обект. На Нецка принадлежи следният пример. Когато конник нагазва с кон в река, за наблюдателя той мислено се превръща в подводница. Според С. Кослин [10] подобни мисловни операции не са много трудни за изпълнение, особено когато образите се съпоставят на понятията.

Последните способности в класификацията на Нецка са способностите за *абстрахиране*. Те са свързани с обръщане на внимание само на избрани характеристики на обекта и пренебрегване на останалите. Например можем да си мислим, че квадрат-

ният тричлен е тримерен вектор, чиито координати са съответните коефициенти на тричлена. В този случай се абстрахираме от променливата в квадратния тричлен и нейните степени. Тази абстракция води до изключително съдържателния резултат, че множеството на всички квадратни тричлени може да се отъждестви с тримерното векторно пространство над полето на комплексните числа.

Според нас, едни от най-впечатляващите резултати в областта на интелектуалните способности са тези на Р. Стърнберг [11], който предлага тридъгов модел на интелигентността. Според него у талантливия се появява инсайт (прозрение, шесто чувство), което го отличава от обикновените хора. Следните три процеса характеризират инсайта: селективно разкодиране, селективно комбиниране и селективно сравняване. *Селективното разкодиране* е разграничаване на същественото от несъщественото, отделяне на житото от пиявата. Талантливият подхожда към информацията избирателно и се освобождава от ненужното. *Селективното комбиниране* е синтезиране на разсходящи и несъвместими на пръв поглед битове информация. Талантливият обобщава и комбинира теории, идеи и хипотези в кохерентни парадигми или позиции. *Селективното сравняване* е отнасяне на новата информация към миналото знание. Тези три процеса се намират в постоянна връзка и осъществяват подходящо взаимодействие, което позволява на “талантливия” по-успешно да преодолява значимите препятствия и по-бързо да възприема новите знания, когато става дума за обучение, или новата информация, когато става дума за приложения, както в сферата на думите и понятията (речника), така и в сферата на общата информация и познанията за света. В допълнение, превъзходството на можещия се изразява във владение на стратегии (не само математически), в способността му да мисли за собствения процес на мислене, в по-високото “ниво на автоматизация” (бързина в обработване на информация), във възможността да прави експертни оценки в специфични области. Стърнберг отбелязва, че оперативността в различните ситуации, дори за хора с висок коефициент на интелигентност IQ, зависи от мотивацията. Оттук следва, че на оперативността може да се влияе при положение, че е заложена, за да може да се прояви в най-висока степен.

4. Идеята за стъпаловиден инструментариум. Официално приетата система за обучение на масовия ученик е класно-урочната, която осигурява плавност и системност в преподаването и възприемането. Освен това тя държи сметка за възпитанието и най-важната роля в нея се пада на учителя. За разлика от организираното образование в училище откриването, мотивирането и подготовката на изявени ученици има специфичен характер. Той се определя преди всичко от необходимостта за създаване на творческа атмосфера по време на обучение, която постепенно да превръща учениците в изследователи и да ги насочва към самостоятелност не само по отношение на мисленето, но и към самия процес на обучение, т.е. към самообучение. Урочната система въпреки своите предимства, изразяващи се най-вече във възможността за стегнатост и колективност на работата, ограничава не само по причина на време. Основните недостатъци са именно по отношение на изявените – на тези, чиито интереси и възможности излизат извън рамките на класа. Отчитайки тези особености, участниците в разработването на проекта MATHEU стигнаха до идеята за т.нар. “стълби” (*ladders*). Това са системи от задачи по всяка от темите, които партниращите държави определиха като съдържание на споменатите в нача-

лото две нива на обучение. Целта на дадена система е да се осигури специфична математическа среда (микросвят) и понеже задачите са подредени по нарастваща трудност, съответният ученик се “изкачва по стълбата”, решавайки задача след задача и стигайки до нивото (стъпалото) на притежаваните възможности. Става дума за дейност, при която целта да се преодолее по-високото стъпало е и мотив. “Стълбата” създава условия за математическо творчество, задълбочава и разширява математическата култура, формира умения и навици за самостоятелно овладяване на нови знания и развива математически способности. Чрез изброените дейности учениците постигат задълбочено разбиране на математически знания, проявявайки съзнателност по пътя на разбирането. Те развиват умения за решаване на трудни задачи, за оценяване на факти и взимане на решения. У тях се стимулира усъвършенстване на известни идеи и генериране на нови, повишава се способността за търсене и откриване, създават се навици за изследователска дейност.

Известният холандският математик и педагог Ханс Фройдентал твърди, че [12]: “При обучението по математика обучаващият се трябва да премине през следните етапи: първи – инстинктивно преоткриване; втори – съзнателно приложение; трети – формално определение.” По повод на първия етап ще споменем известния швейцарски психолог Жан Пиаже, според когото пълното усвояване настъпва само в процеса на преоткриването. В това се състои един от най-общите закони на психологията. В същото време, за да има преоткриване, трябва да се създават проблемни ситуации. Те пък от своя страна са най-подходящата среда за прилагане на наученото. Идеята на “стълбите” предоставя такава възможност и осъществява формулирания още от Аристотел принцип за организация и структуриране на знанията. Решаването на нова и по-трудна задача от съответната система опреснява и поддържа динамичните връзки между фактите, а това от своя страна осигурява гъвкавост и комбинативност на мисленето. Реализира се възможност за разумно вариране на наличните знания и незатормозен преход от един подход към друг за взимане на решения, което е свързано с целенасочена ориентация при попадане в проблемна ситуация и обхващане на ситуацията в цялост. По думите на Анри Поанкаре [13]: “Да твориш означава да различаваш и да избираш.” Учениците се мотивират, впрягат волята и ума, активизират мисловната си дейност, освобождават съзнанието си от ненужното, съсредоточават се върху същественото, устремяват се към целта и получават шанс да успеят при разрешаване на проблемната ситуация.

Ще си послужим с един пример за подреждане на няколко елемента в единна система, който е свързан с инварианти и групи от субституции.

Задача 1. Числата от 1 до 50 са разположени едно след друго в естествен ред. С помощта на коя от посочените операции е възможно те да се подредят в обратен ред? (Допуска се многократно прилагане на съответната операция.)

- а) смяна на местата на кои да е две числа;
- б) смяна на местата на кои да е две съседни числа;
- в) смяна на местата на кои да е две числа, между които има точно едно число;
- г) смяна на местата на кои да е две числа, между които има точно две числа;
- д) циклична смяна на кои да е три числа;
- е) инверсия на кои да е четири числа, т.е. поставяне на кои да е четири числа на същите места, но в обратен ред.

Решение: а) Исканото в условието подреждане е възможно с тази операция. Дос-

татъчно е да разменим 1 и 50, 2 и 49 и т. н., 25 и 26. Всъщност разменихме местата на числата, разположени симетрично спрямо центъра.

б) С тази операция исканото подреждане е също възможно: последователно разменяме 1 с 2, след това с 3, с 4 и т.н., като накрая разменяме 1 с 50; по този начин числото 1 отива на последно място, а разположението на останалите числа се запазва; по същия начин постъпваме с 2, след това с 3 и т.н.

в) Сега забелязваме, че с помощта на тази операция става замяна на четно число с четно и на нечетно число с нечетно. Понеже 1 и 50 са с различна четност, исканото подреждане не може да се получи.

г) С помощта на тази операция става размяна на числа, които имат един и същи остатък по модул 3. Понеже остатъците на 1 и 50 по модул 3 са различни, исканото подреждане отново не може да се получи.

д) Тук въвеждаме понятието “инверсия” в една пермутация $a_1, a_2, \dots, a_n$: инверсия е всяка двойка (a_i, a_j) , за която $i < j$ и $a_i > a_j$. В редицата 1, 2, 3, ..., 50 броят на инверсиите е нула, докато в редицата 50, 49, ..., 2, 1 този брой е $49+48+\dots+1 = \frac{(1+49) \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49$. В първия случай броят на инверсиите е четен, а във втория е нечетен. От друга страна при циклична замяна на 3 числа броят на инверсиите се променя с 2; т.е. четността е инвариантна: $abc \rightarrow bca = abc \rightarrow bac \rightarrow cba$. Следователно с тази операция не е възможно да се получи исканото подреждане.

е) Сега операцията може да се запише във вида

$$abcd \rightarrow dcba = abcd \rightarrow bacd \rightarrow bcad \rightarrow bcda \rightarrow cbda \rightarrow cdba \rightarrow dcba,$$

т.е. тя е еквивалентна на 6 транспозиции и значи броят на инверсиите се изменя с 6; четността отново е инвариантна. Както в д) следва, че и с тази операция не е възможно да се получи исканото подреждане.

Следващата задача е известната задача “15”, създадена през 70-те години на XIX в. от най-големия американски майстор на главоблъсканици Сем Лойд (1841 – 1911). Тази игра представлява квадрат 4×4 , разделен на 16 единични квадратчета. В 15 от единичните квадратчета са записани числата от 1 до 15, като 16-тото квадратче е празно. Според правилата на задачата празното квадратче може да сменя мястото си с някое от съседните му квадратчета. Новополученото празно квадратче отново може да сменя мястото си с някое от съседните му квадратчета.

Задача 2. (играта “15”) Коя от показаните позиции на фигури 2, 3 и 4 може да бъде преобразувана до естественото подреждане на числата от 1 до 15 от първата фигура?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Фиг. 1

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Фиг. 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Фиг. 3

2	1	4	3
6	5	8	7
10	9	12	11
15	13	14	

Фиг. 4

Решение: Задачата се решава лесно, като се използва техниката от предната задача. Най-напред да забележим, че в квадрат 2×2 с едно празно квадратче всяка смяна на мястото на празното квадратче може да се разглежда като циклична смя-

на на числата в останалите 3 квадратчета. В същото време, съгласно задача 1. д) четността на броя на инверсиите при циклична смяна на 3 числа се запазва. От друга страна броят на инверсиите в позицията от Фиг. 2 е $\frac{(1+14) \cdot 14}{2} = 15.7$, т.е. този брой е нечетен. В позицията от Фиг. 3 инверсията е единствена (двойката (15, 14)), т.е. броят е отново нечетен. В позицията от Фиг. 4 броят на инверсиите е четен (8). Понеже в позицията от Фиг. 1 няма инверсии (броят е четното число 0), то с изключение на Фиг. 4 останалите конфигурации не могат да бъдат преобразувани до естественото подреждане на числата от 1 до 15 от Фиг. 1. За Фиг. 4 съществува последователност от операции, водеща да исканото подреждане, но върху подробностите няма да се спираме.

Отделните елементи на разгледаната примерна система и същностното обвързване между тях отчитат не само структурата и предложената методика, но и възможностите на учениците. Стимулирането и активизирането на тези връзки, както и на самите дейности, породени от тях, могат да се осъществяват индивидуално или колективно по време на дискусии ученик – ученик или ученик – преподавател.

5. Предстоящи дейности. Както беше отбелязано, разработването на системите задачи във формата на “стълби” по проекта MATHEU е в довършителна фаза. Предстои апробация, която ще бъде осъществена от ученици. За тази цел всяка от партниращите държави ще извърши селекция на двама свои представители – по един за двете възрастови групи. Избраните ученици ще участват в научно-изследователски лагер в Кишър в края на м. юни т. г. По време на лагера всеки участник ще има възможност да работи самостоятелно със задачите за съответната група и да представи нивата, до които е достигнал. Резултатите ще бъдат използвани за извършване на корекции, след което “стълбите” ще бъдат включени в предвиждания европейски учебник (с хартиен и CD вариант). Предстои също превеждане на учебника на езиците на партниращите държави (в т. ч. и на български език). Заключителният етап на проекта е организирането на лекционен курс за учители, които ще бъдат обучени как да прилагат пълния инструментариум и как да си служат с учебника. Очакванията са учителите да придобият умения за стимулиране на способните и талантливите ученици, за да могат последните да изградят собствено разбиране и сръчности при овладяване на математически знания. Лекционният курс ще бъде поддържан на езиците на държавите-партньори в рамките на бъдещ проект.

Уеб страницата на проекта MATHEU е <http://www.matheu.org>.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. КЕНДЕРОВ, С. ГРОЗДЕВ. Европейският проект “MATHEU: откриване, мотивиране и подкрепа на математическите таланти в европейските училища”. *Математика и математическо образование*, **33** (2004), 39–49.
- [2] L. SHULMAN. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, **15** (1986), 2, 4–14.
- [3] Л. ДЕСЕВ. Речник по психология, Булгарика, София, 1999.
- [4] В. КРУТЕЦКИЙ. Психология математических способностей школьников, Москва, 1968.
- [5] Д. ПОЙА. Математическое открытие, Наука, Москва, 1976.

- [6] G. GOLDIN. Theories of mathematical learning, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1996.
- [7] E. NECKA. On the nature of creative talent, Giftedness: A continuing worldwide challenge, New York: Trillium Press, 1986.
- [8] W. GORDON. Synectics: The development of creative capacity, Harper and Row, New York, 1961.
- [9] M. STEIN. Physiognomic cue test, Amagansett, The News Press, New York, 1974.
- [10] S. KOSSLYN. Ghosts in the mind's machine: Creating and using images in the brain, Norton, New York, 1983.
- [11] R. J. STERNBERG. Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence, Cambridge, New York, 1985.
- [12] Г. ФРОЙДЕНТАЛЬ. Математика как педагогическая задача, Москва, 1982.
- [13] А. ПУАНКАРЕ. О науке, Наука, Москва, 1990.

Сава Гроздев

Институт по математика и информатика

ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8

1113 София

e-mail: savagroz@math.bas.bg

Петър Кендеров

Институт по математика и информатика

ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8

1113 София

e-mail: kenderovp@cc.bas.bg

INSTRUMENTARIUM FOR IDENTIFICATION AND SUPPORT OF GIFTED STUDENTS IN MATHEMATIS

S. Grozdev, P. Kenderov

The paper considers some basic ideas of the investigations, which are in a process of realization by the partners of the European project "MATHEU: identification, motivation and support of mathematical talents in European schools". The project is supported financially by the European Union (Socrates Programme).