

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2005
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2005
*Proceedings of the Thirty Fourth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 6–9, 2005*

ЕРДЬОШ-ДИОФАНТОВА ГЕОМЕТРИЯ: МЕТОДИЧЕСКИ
АСПЕКТ

Кирил Г. Атанасов, Мария Н. Брънчева, Станчо Г. Димиев

Тази статия е продължение и развитие на идеите изложени в статията на Кирил Атанасов и други [1] публикувана в “Математика и математическо образование”, 2004. Тук се разисква една възможна конкретна методическа реализация.

Изучаването на геометрията може да се извършва с помощта на чертежи като се използват понятията “равенство на отсечки”, “равенство на ъгли”, “еднакви триъгълници” и т.н. Въпросните чертежи се осъществяват само с помощта на линия и пергел. При този подход нямаме явна намеса на числата. Това е древногръцкото разбиране за геометрията (от III век преди н.е. до III век след н.е.), осъвременено по различен начин в съвременните учебници.

От друга страна, геометрията може да се изучава с помощта на числа, използвани за координати. Това е подсказано от Декарт, развито от Ферма през 17 век и постепенно усъвършенствано от различни видни математици докато придобие вида на това, което днес наричаме аналитична геометрия.

Рекапитулация: За нас, древногръцката геометрия, в съвременния ѝ вид и аналитичната геометрия на Декарт, 17 век, са изходен пункт за нашата концепция, която свързваме с използването на компютърни методи. Ясно е, че

древногръцкото разбиране, осъвременено понастоящем може да се интерпретира компютърно с помощта на компютърни графики, без съществена намеса на числата. Има компютърни програми, които дават възможност да визуализираме този подход към геометрията.

От друга страна аналитичната геометрия е по-благоприятна за компютърна реализация на основните геометрични понятия: точка (чрез координатите x и y), права (чрез коефициента k), окръжност (чрез координатите на центъра и радиуса).

Когато работим с произволни геометрични фигури, например триъгълници в равнината, се налага да работим най-общо с реални числа. Но компютърната реализация на реалните числа се осъществява чрез приближения, което дава неадекватно представяне на разглежданите геометрични фигури. Така стигаме до заключение, че естествените за адекватна компютърна геометрична реализация са тези геометрични фигури, които се определят от точки с цели координати, цели дължини (отсечки, радиуси) и т.н.

Независимо от приведената по-горе мотивация, идеята за разглеждане на фигури определени с помощта на цели дължини (integral distances) е дадена от полския математик Станислав Улам и реализирана от големия унгарски математик Пал Ердьош. Известна е следната теорема на Ердьош и Анинг: *Ако едно безкрайно множество от точки в равнината удовлетворява условието, разстоянието между всеки две негови точки да бъде цяло положително число, то точките на това множество се разполагат върху една права.*

Допълнителното изискване да разглеждаме само точки с цели координати е формулирано в една статия на Иван Тонов и Станчо Димиев. Съединявайки посочените по-горе изисквания стигаме до идеята да разглеждаме фигури в равнината определени от точки с целочислени координати, като разстоянията между тях са цели положителни числа.

Тези фигури са наречени в цитираната по-горе статия диофантови фигури в чест на големия древногръцки математик Диофант, който си е служил само с цели и дробни числа. Впрочем, една фигура в равнината се нарича *диофантова*, ако е определена от точки (върхове) с целочислени координати и разстоянията между тях са цели положителни числа. Изучаването на диофантовите фигури може да се схваща като предмет, който използва съображения от елементарната теория на числата (аритметиката на целите числа). Получава се една специална аритметична геометрия, която наричаме Ердьош-Деофантова геометрия.

Ердьош-Деофантовата геометрия е съществено различна от евклидовата планиметрия. Например, в Ердьош-Деофантовата геометрия нямаме равностранны триъгълници. Лесно се доказва, че не може да се построи равнострани триъгълник, чийто върхове са с целочислени координати и страните му имат положителни целочислени дължини. Оказва се, че основна роля в Ердьош-Деофантовата геометрия играят питагоровите триъгълници, които се определят от така наречените питагорови тройки. Ред задачи в Ердьош-Деофантовата геометрия са пряко свързани с питагоровите тройки.

Изобщо, понятието диофантов триъгълник може да се схваща като обобщение на понятието питагоров триъгълник.

По-сложни са диофантовите четириъгълници. Множество примери са представени в статия на М. Брънчева публикувана в юбилейния сборник на ПУ, филиал Смолян, септември 2002. Най-общите диофантови фигури, нележащи на една права се определят винаги от краен брой върхове (следва от цитираната теорема на Ердьош). Това обстоятелство, прави възможно конструирането на диофантови фигури с голям брой върхове чрез компютърни програми. По такъв начин получаваме възможност да решаваме чисто експериментално някои математически задачи, например такива в крайните диофантови равнини или, което е същото, в крайните полета $Z_p[i]$ за малки стойности на простото число p . Това обстоятелство не е за подценяване от гледище на педагогиката и методиката на математиката. Компютърното експериментиране се превръща даже в средство за доказателство благодарение на възможността за експериментално изчерпване на възможните частни случаи. Некапомним, че понастоящем компютърният експеримент се използва като евристично средство при изучаването на сложни ситуации. Изобщо балансът между експерименталното компютърно изучаване от една страна и чисто концептуалното изучаване от друга предопределя успеха в ред съвременни чисто научни изследвания.

На чисто концептуално ниво можем да говорим за геометрия на диофантовите фигури като геометрия на целочислените разстояния (integral distances). Структурната група на тази геометрия, съгласно концепцията на Феликс Клайн, е много бедна. Очевидно, тя се състои от обратимите Гаус-Питагорови хомоморфизми, които се определят от обратимите елементи в гаусовия пръстен $Z[i]$. Геометрически това са ротациите на 90° които образуват циклична група от ред 4. Напомняме, че разглеждаме само диофантови фигури, които задължително съдържат началото, което автоматически изключва транслациите с целочислена стъпка.

В крайните диофантови равнини или крайните полета $Z_p[i]$, $p = 4k + 3$, целочислените разстояния се определят чрез квадратичните остатъци в полето Z_p (С. Димиев, [5]). Както бе отбелязано по-горе в тези случаи имаме възможност за разнообразно компютърно експериментиране при конструирането на диофантови фигури. Освен това, имаме предвид принципния въпрос за намирането на максималните диофантови фигури. Това е един труден въпрос в гаусовия пръстен $Z[i]$. За крайните полета $Z_p[i]$ отговор на този въпрос може да се търси чрез компютърни програми изчерпващи краен брой възможности.

За малки стойности на простото число p успехът е гарантиран, даже за $p = 7, 11, 19$ и други $p = 4k + 3$, пресмятането се отдава на ръка. Изучавайки факторизацията по модул p

$$\text{Mod } p : Z[i] \rightarrow Z_p[i],$$

Получаваме възможност да определим някои максимални диофантови фигури в $Z[i]$ като пълни праобрази (оригинали) на максимална диофантова фигура в $Z_p[i]$.

Диюфантовите фигури определят естествени триангулации в равнината. По-общо от тях са диофантовите триангулации, наречени диофантови килими. Всяка диофантова фигура определя диофантови килими, но обратното не е вярно. Примери на диофантови килими с много върхове са разработени в съвместна статия на доц. С. Гочева, ас. Хр. Килимова и гл ас. М. Брънчева, публикувана в сборника на EWM (европейските жени математички), Варна, август, 2002г. Оцветени подходящо тези примери подпомагат развиването на естетически възприятия у обучаващите се чрез математиката и компютърната графика. Напомняме, че една от най-важните неформални характеристики на математиката е красотата на математическите обекти.

По-долу предлагаме конкретна програма за една възможна реализация на описаното направление.

I. Проблем (тема): Изучаване на елементи от Ердьош-Диюфантовата геометрия.

II. Предмет на изследването – да се получи система от знания по Ердьош-Диюфантова геометрия, изучаването на които да подпомогне оползотворяването на визуализацията чрез компютърни средства, а с това и привеждането на средното образование в съответствие със съвремените изисквания.

III. Цел. Да се изследват възможностите, начините и средствата за органическо включване на елементи от Ердьош-Диюфантовата геометрия в курса по математика – СИП на средното училище с оглед ефективното оползотворяване на визуализацията в обучението в условията на интеграция на математика и информатика.

IV. Задачи.

- 1) Да се определи чрез подходящ подбор учебното съдържание по Ердьош-Диофантова геометрия, както и да се структурира, което да бъде необходимо и достатъчно за изучаване от учениците в средното училище, като се определи мястото на знанията по Ердьош-Диофантова геометрия и методите на разработването им в СИП или ЗИП по математика
- 2) Да се създаде и усъвършенства методиката на преподаване на подбрани учебен материал, като се използват класически и нови съвременни методи.
- 3) Да се създаде система от задачи и подбере правилното съотношение между нея и системата от знания, което ще даде възможност да се оцени теоретическата и приложната страна на учебния материал.
- 4) Да се провери експериментално ефективността на разработения комплекс от педагогико-методически средства на обучение в условията на новите изисквания за реформиране на математическо образование в средното училище.
- 5) Да се подпомогне развиване на естетически възприятия чрез компютърна визуализация на оцветени диофантови килими.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] К. АТАНАСОВР С. ДИМИЕВ, Д. ТОЛЕВ, К. МАРКОВ. Стимулиране на творческите наклонности по математика – алтернатива на математическите състезания. *Математика и мат. образование*, **33** (2004), 297–300.
- [2] S. GOSHEVA-ILIEVA, H. KILIMOWA, M. BRANCHEVA. An algorithm for creating rectangular Diophantine patterns and carpets. EWM International Workshop on Groups and Graphs, 2002, Varna, Bulgaria, 57–60.
- [3] S. DIMIEV, K. MARKOV. Gauss Integers and Diophantine Figures. *Mathematics and Education in Math.*, **31** (2002), 88–95; arXiv: math. NT/0203061 v1 7 Mar 2002.
- [4] С. ДИМИЕВ, ИВ. ТОНОВ. Диофантови фигури. *Математика и мат. образование*, **15** (1986), 383–390; MR 1988:d 51015.
- [5] S. DIMIEV. A setting of a Diophantine Distance Geometry. (to be published).

Кирил Георгиев Атанасов

Пловдивска математическа гимназия

Ул. Чемшир 11

4004 Пловдив

Мария Николова Брънчева

Пловдивски университет, филиал – Смолян

Ул. Дичо Петров 32

Смолян

e-mail: mbrancheva@yahoo.com

Станчо Генчев Димиев

Пловдивски Университет, филиал – Смолян

Ул. Дичо Петров 32

Смолян

и

Институт по математика и информатика

Българска академия на науките

ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8

1113 София

e-mail: sdimiev@math.bas.bg

282

ERDOES-DIOPHANTINE GEOMETRY: DIDACTIC ASPECT

K. G. Atanasov, M. N. Brancheva, St. G. Dimiev

This paper can be considered as a first realization of the program exposed in the paper [1]. The main purpose is to bring some opinions for mathematical investigations on accessible level for young teachers of mathematical schools. Of course, there are many excellent papers in elementary number theory, combinatorics, finite geometry, etc. which can be use for the mentioned purpose. The reader can see the European project “Matheu” popularized in our country by P. Kenderov and S. Grozdev (see Math. and Education in Math., 33 (2004), 39–49).

Our choice is related with a question of the Polish mathematician Stanislaw Ulam, developped by Paul Erdős and others (see Annig, A., Erdős, P., Integral Distances, Bull. Amer. Math. Soc., (1945), 598-600).

In fact, Ulam state a question about a geometry in which we have only integral distances, i.e. all distances are measured by positive integers. In our treatment this question is transmitted on the lattices of integers coordinates $Z \times Z$, or equivalently on Gauss ring $Z[i]$. According to Felix Klein understanding of geometry, we obtain a geometry of some figures (called by us Diophantine figures) defined by finite sets of points in $Z \times Z$, with a very simple structural group. In comparison with classical Euclidean Geometry, our geometry is poor of habitual geometric properties, but it gives large possibilities for computer experimentation. Especially we have in mind, for instance, the problem of the search of maximal Diophantine figures. It is a difficult problem in $Z \times Z$, but it can be attacked via a factorization modulo p , p being a prime number, $p = 4k + 3$. In the corresponding finite fields $Z_p[i]$ the maximal Diophantine figures can be exhausted by computer program. Then it is to study the possibility to take full inverse images. Finally, we emphasize on the natural balance between mathematical reasoning and computer experimentation including coloring, which appear in our program.