

ПОВИШАВАНЕ НА ЕФЕКТИВНОСТТА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА ЧРЕЗ ПОДБОР НА СЪДЪРЖАТЕЛНИ ЗАДАЧИ

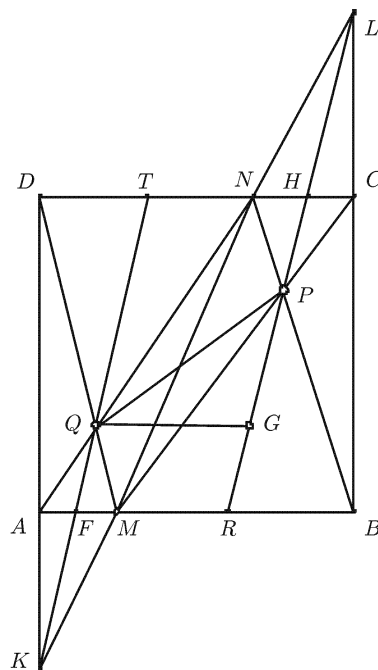
Томас М. Георгиев

Авторът споделя опита си за повишаване на ефективността на обучението чрез подбор на съдържателни задачи. Предложени са различни решения на задача от националната олимпиада по математика в Турция от 1996 година.

В настоящата статия искам да споделя опита си в работата с ученици в часовете по задължително избираема подготовка по математика. Когато говоря за съдържателна математическа задача, имам предвид такава, в която решението е свързано с изучавания материал, не е тривиално и дава възможности за достигане на крайната цел с различни методи и средства. Най-често такива задачи могат да се намерят в темите на математическите конкурси и олимпиади, но учителят трябва внимателно да ги подбери, съобразявайки се с нивото на подготовката на учениците си. Като се обсъдят различни начини за решение, могат да бъдат актуализирани знанията от различни области на учебното съдържание и много полезни твърдения и помощни задачи. За илюстрация на този подход предлагам следната задача от националната олимпиада на Турция през 1996 година:

Върху страните AB и CD на квадрата $ABCD$ са отбелязани точките M и N съответно. Правите CM и BN се пресичат в точка P , а AN и MD – в точка Q . Да се докаже, че $PQ \geq \frac{1}{2}AB$.

Решение 1: $AM < DN$ и правата MN пресича правите AD и BC съответно в точките K и L , правата KQ пресича AB и CD в F и T , правата LP пресича AB и CD в R и H , права през Q , успоредна на AB , пресича LR в G (чертеж 1). От теоремата на Шайнер за трапеца $AMND$ и трапеца $MBCN$ следва, че F , R , H и са среди съответно на AM , MB , CN и ND и от тук, че FR и TH са равни на половината от страната на квадрата. Следователно $FRHT$ е успоредник и

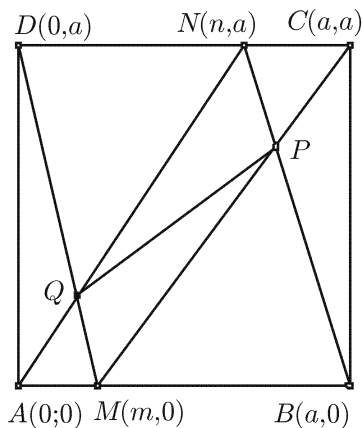


черт. 1

оттук и $FRGQ$ е успоредник и $QG = FR = \frac{1}{2}AB$. От подобните триъгълници AMQ и NDQ следва, че съответните медиани QF и QT са пропорционални на AM и ND и $QF < QT$. Аналогично от подобие на триъгълниците MBP и CNP следва, че $PR > PH$ и следователно G е между R и P . От успоредника $QGHТ$ се вижда, че ъглите QGH и QTH са равни. Но ъгъл QTH е съседен на острия ъгъл KTD в правоъгълния триъгълник KTD и е по-голям от 90° . Следователно в триъгълник PQG страната PQ лежи срещу най-големия ъгъл и $PQ > QG = \frac{1}{2}AB$.

Аналогично се разглежда и случаят, когато $AM > DN$. Ако $AM = DN$, Q и P са пресечните точки на диагоналите на правоъгълниците $AMND$ и $MBCN$ и $PQ = \frac{1}{2}AB$ като средна отсечка в триъгълника ABN .

Решение 2: Нека разгледаме правоъгълна координатна система с начало в точката A и оси определени от страните AB и AD на квадрата $ABCD$. Тогава можем да въведем координати на точките $A(0;0)$, $(a;0)$, $C(a;a)$, $D(0;a)$, $M(m;0)$, $N(n;a)$, където a е дължината на страната на квадрата $ABCD$ (чертеж 2).



черт. 2

AN има уравнение $y = kx$ и координатите на N го удовлетворяват: $a = kn$ и $k = \frac{a}{n}$. Уравнението

на AN добива вида $y = \frac{a}{n}x$. Уравнението на DM има вида $y = k_1x + l_1$, $a = k_1 \cdot 0 + l_1$, $0 = k_1 \cdot m + l_1$ и окончателно $y = -\frac{a}{m}x + a$. Определяме координатите на Q като пресечна точка на двете прави: $\frac{a}{n}x = -\frac{a}{m}x + a$, $x_1 = \frac{mn}{m+n}$, $y_1 = \frac{am}{m+n}$ и $Q\left(\frac{mn}{m+n}; \frac{am}{m+n}\right)$.

Уравнението на MC има вида $y = k_2x + l_2$, $0 = k_2 \cdot m + l_2$, $a = k_2 \cdot a + l_2$ и окончателно $y = \frac{a}{a-m}x - \frac{am}{a-m}$. Уравнението на BN има вида $y = k_3x + l_3$, $0 = k_3 \cdot a + l_3$, $a = k_3 \cdot n + l_3$ и окончателно $y = -\frac{a}{a-n}x + \frac{a^2}{a-n}$. Определяме координатите на точката P като пресечна точка на двете прави: $\frac{a}{a-m}x - \frac{am}{a-m} = -\frac{a}{a-n}x + \frac{a^2}{a-n}$, $x_2 = \frac{a^2 - mn}{2a - m - n}$, $y_2 = \frac{a(a-m)}{2a - m - n}$ и $P\left(\frac{a^2 - mn}{2a - m - n}; \frac{a(a-m)}{2a - m - n}\right)$. Имаме, че

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \geq |x_2 - x_1|$ и е достатъчно да установим верността на неравенството $\frac{a^2 - mn}{2a - m - n} - \frac{mn}{m+n} \geq \frac{a}{2}$. След тъждествени преобразования се получава, че това неравенство е равносилно на очевидно вярното $(m - n)^2 \geq 0$.

Решение 3: За доказателството ще използвам следната:

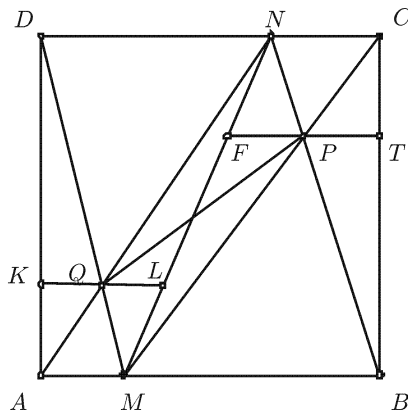
Лема 1. Ако в трапец $ABCD$ с основи AB и CD диагоналите се пресичат в точка O , то $S_{AOD} = S_{BOC} \leq \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Доказателство на Лема 1: Да означим $S_{AOB} = S_1$, $S_{COD} = S_2$. От подобие на триъгълниците AOB и COD получаваме последователно $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$, $\frac{S_{AOD}}{S_2} = \frac{S_{BOC}}{S_2}$, $S_{AOD} = S_{BOC}$ и $\frac{S_1}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_2}$ (използваме и зависимостта между лицата на триъгълници с обща височина). Следователно $S_{AOD} = S_{BOC} = \sqrt{S_1 S_2}$, $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$ и лесно се установява верността на неравенството $\sqrt{S_1 S_2} \leq \frac{S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}}{4}$, което е равносилно на $(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})^2 \geq 0$.

Да означим с a , x и y съответно страната на квадрата $ABCD$ и разстоянията от Q до AD и от P до BC . От Лема 1 следва, че $S_{AQD} \leq \frac{1}{4}S_{AMND}$, $S_{BPC} \leq \frac{1}{4}S_{MBCN}$, $S_{AQD} + S_{BPC} \leq \frac{1}{4}S_{AMND} + \frac{1}{4}S_{MBCN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Следователно $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay \leq \frac{1}{4}a^2$, $x + y \leq \frac{1}{2}a$. Но $x + y + PQ \geq a$, защото a е най-малкото разстояние между точки от правите AD и BC . Оттук следва, че $PQ \geq \frac{1}{2}a$.

Решение 4: Ще използвам известното твърдение:

Лема 2. Ако в трапец $ABCD$ с основи $AB = a$ и $CD = b$ диагоналите се пресичат в точка и права през O , успоредна на основите, пресича AD и BC съответно в точки X и Y , то $OX = OY = \frac{ab}{a+b}$.



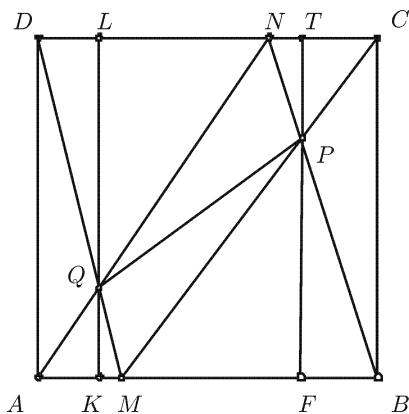
черт. 3

Нека $AM < DN$ и отсечка KL , успоредна на AM с краища върху AD и MN , минава през Q , а отсечка FT , успоредна на MB с краища върху MN и BC , минава през P (чертеж 3). Съгласно Лема 2 за трапеца $AMND$ и трапеца $MBCN$ следва, че $KQ = QL$ и $FP = PT$. При ортогонално проектиране върху AB проекцията на PQ е сума от проекциите на QL , LF и FP и затова е по-голяма от сумата на проекциите на KQ и PT . Следователно проекцията на PQ е по-голяма от $\frac{1}{2}AB$ и следователно и PQ е по-голяма от $\frac{1}{2}AB$.

Аналогично се решава задачата при $AM < DN$. При $AM = DN$ се получава, че $PQ = \frac{1}{2}AB$ както в първото решение.

Решение 5: За трапеца $AMND$ прилагаме Лема 2 и получаваме $KQ = \frac{AM \cdot DN}{AM + DN}$ (чертеж 3). От неравенството между среднохармонично и средноаритметично за дължините на AM и DN следва, че $\frac{AM \cdot DN}{AM + DN} \leq \frac{AM + DN}{4}$ и $KQ \leq \frac{AM + DN}{4}$. Аналогично разглеждаме и трапеца $MBCN$ и получаваме, че $PT \leq \frac{MB + NC}{4}$.

Следователно $KQ + PT \leq \frac{AM + MB + DN + NC}{4} = \frac{1}{2}AB$. Но $KQ + QP + PT \geq AB$ (AB е най-малкото разстояние между точки от правите AD и BC) и следователно $PQ \geq \frac{1}{2}AB$.



черт. 4

Решение 6: през точка Q отсечка KL , успоредна на AD , с краища върху AB и CD и през точка P отсечка FT , успоредна на AD , с краища върху AB и CD (черт. 4). Тъй като при хомотетия с център Q и съответни точки K и L отсечките AK и KM са съответни на NL и LD , то $\frac{AK}{KM} = \frac{NL}{LD}$. Но $AK = LD$, като срещуположни страни в правоъгълника $AKLD$, и следователно $AK^2 = KM \cdot NL$, т.е. AK е средногеометрична на KM и NL . Аналогично се получава, че FB е средногеометрична на MF и TN . От неравенството между средногеометрично и средноаритметично на две числа следват неравенствата: $AK \leq \frac{KM + NL}{2}$, $FB \leq \frac{MF + TN}{2}$. Следователно

$AK + FB \leq \frac{KM + NL}{2} + \frac{MF + TN}{2} = KF$ и получаваме, че ортогоналната проекция KF на QP е по-голяма или равна от $\frac{1}{2}AB$ и следователно и PQ е по-голяма или равна от $\frac{1}{2}AB$.

За самостоятелна работа на учениците може да се постави задачата да намерят решение с помощта на векторния метод (то е подобно на решение 2 и затова не е разглеждано отделно).

При обсъждането на различните решения се актуализират знания, свързани с теоремата на Щайнер и подобни триъгълници (решение 1), работа с координатна система – уравнение на права и разстояние между точки (решение 2), зависимости с лица и приложението им (решение 3), ортогонално проектиране (решение 4), класически неравенства – между среднохармонично и средноаритметично и между средногеометрично и средноаритметично на две числа (решения 5 и 6), хомотетия (решение 6).

При подбор и обсъждане на различните решения на една съдържателна задача се постига много по-висок ефект, отколкото при използването на няколко отделни задачи. Разглеждането на различните методи и идеи протича естествено, при висока активност на учениците и минимален разход на време.

Откриването на задачи, даващи възможности за предложението подход е, от една страна, труден и бавен процес и изисква от преподавателя упорита самостоятелна работа, но от друга страна, това е процес на професионално обогатяване и повишаване на квалификацията.

Тома Маринов Георгиев
ул. "Цар Александър II" € 80, вх. В, ап. 44
3700, Видин

**INCREASING MATHEMATICAL EDUCATION EFFECTIVENESS
USING SELECTION OF INSTRUCTIVE PROBLEMS**

Toma M. Georgiev

The author shares his experience in increasing education effectiveness using selection of instructive problems. Here are given different solutions of a problem from The Turkish National Mathematical Olympiad in 1996.