

ЕДНА РЕЦИПРОЧНА ЗАВИСИМОСТ

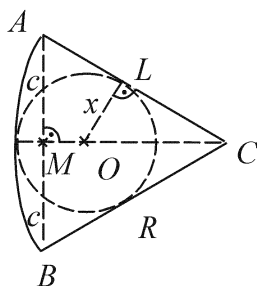
Милен Н. Найденов

В първата си част тази работа съдържа известни задачи, обединени в обща идея, които са леки, приятни и подходящи за работа в клас. По-нататък е показано развитието на идеята с помощта на обобщения: веднъж – чрез смяна на размерностите на величините, които участват във формулите, втори път – чрез увеличаване броя на събираемите и трети път – чрез промяна на константата. При подходящо комбиниране на тези обобщения могат да бъдат съставени оригинални задачи, които естествено са и по-трудни. Такива са и последните пет от предлаганите в работата и те са получени след прилагане на разглежданата идея при други условия. Интересен момент е, че се комбинира геометрично и алгебрично осмисляне на проблема.

Разглежданият материал е структуриран така:

Една реципрочна зависимост:

1. Между дължини на отсечки в планиметрията



Задача 1. [5] В сектор с радиус R и хорда с дължина $2c$ е вписана окръжност с радиус, чиято дължина е x . Да се докаже зависимостта $\frac{1}{x} = \frac{1}{c} + \frac{1}{R}$.

Решение: От подобие на правоъгълните триъгълници OLC и AMC следва пропорцията $\frac{x}{R-x} = \frac{c}{R}$, от която се получава и търсения резултат.

Задача 2. [9] Във всеки трапец с дължини на основите a и b с x е означена дължината на отсечката, успоредна на диагоналите с начало пресечната точка на диагоналите и с край върху едно от бедрата. Да се докаже зависимостта $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$.

Упътване: След събиране на две пропорции, които се получават от разглеждане на подобни триъгълници, следва $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ и оттук резултата.

Задача 3. [6] За разностранния триъгълник ABC ($BC < AC < AB$) са въведени следните означения:

ρ_A – радиусът на окръжността с център върху продължението на BC , която се допира до правите AB и AC ;

ρ_B – радиусът на окръжността с център върху продължението на AC , която се допира до правите AB и BC ;

ρ_C – радиусът на окръжността с център върху продължението на AB , която се допира до правите AC и BC .

Да се докаже зависимостта $\frac{1}{\rho_B} = \frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_C}$.

Задача 4. В правоъгълен триъгълник с дължини на катетите a и b е построена окръжност с радиус с дължина x , която се допира до катетите и центърът ѝ лежи върху хипотенузата.

Тогава $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Задача 5. [11] Вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност дели хипотенузата чрез допирната си точка на отсечки с дължини m и n . Ако височината към хипотенузата на правоъгълния триъгълник е означена с $2x$, то $\frac{1}{x} = \frac{1}{m}$.

Упътване: Да се използва факта, че лицето на всеки правоъгълен триъгълник е равно на произведението $m \cdot n$.

(Това твърдение е известно, като теорема на Бюрлит [1].)

Задача 6. [4] В триъгълник с ъгли $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$ и страни срещу тях съответно с дължини x , a и b е в сила зависимостта $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Решение: Като се използва синусова теорема се пресмята

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{x}{b} &= \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right)}{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7} \cdot 2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin \left(\pi - \frac{3\pi}{7} \right)}{\sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7}} = 1. \end{aligned}$$

Не е трудно за досещане, че във всеки равнобедрен триъгълник с основа x и бедра b , за който $x : b = 1 : 2$ е в сила зависимостта $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

При следните две леки задачи се сменя размерността на величините, които участват във формулата.

Задача 7. Дадени са две външно допирателни окръжности с радиуси r и R . Да се определи радиуса на трета окръжност, която се допира до дадените две окръжности и до общата им външна допирателна.

$$\text{Отг. } \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Задача 8. Във всеки правоъгълен триъгълник с дължини на катетите a и b и височина към хипотенузата h е в сила

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

За всеки триъгълник е известна зависимостта $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, където r , r_a , r_b , r_c са съответно дължините на радиусите на вписаната и на външно вписаните му окръжности. Тази зависимост доказва, че е възможно обобщение и по отношение броя на събираемите в получаваната формула.

Следните две планиметрични задачи са пример за развитие на идеята за обобщение в двете възможни посоки: промяна на размерността и промяна броя на събираемите.

2. Между лица на триъгълници в планиметрията

Задача 9. [9] *Във всеки трапец, на който диагоналът го разделя на два триъгълника с лица S_1S_2 и лице S на триъгълника с основа едно от бедрата на трапеца и връх пресечната точка на диагоналите му е в сила зависимостта*

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}.$$

Задача 10. [12] *За всеки триъгълник, допирните точки на вписаната окръжност със страните му образуват триъгълник с лице S , а допирните точки на която и да е от външновписаните окръжности съответно със страна на триъгълника и продълженията на другите му две страни образуват триъгълници с лица S_1 , S_2 и S_3 . Тогава $\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}$.*

3. Между дължини на отсечки в стереометрията

Задача 11. [3] *Дължините на основен и околен ръб на правилна триъгълна пирамида са означени съответно a и b . Едно сечение, успоредно на околен ръб е квадрат с дължина на страната x . Да се докаже, че $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.*

Задача 12. *В пирамидата $ABCM$ ъглите между ръбовете при върха M са прави и $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$.*

А. Вписаното полукълбо, което допира стените ABM , BCM и CAM има център върху стената ABC и радиус x . Да се докаже зависимостта $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Б. Височината на пирамидата през върха M има дължина H . Да се докаже, че

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Задача 13. [10] *Произволна равнина пресича последователно околните ръбове на правилна четириъгълна пирамида в точки, намиращи се на разстояния a , b , c и d от върха на пирамидата. Да се докаже, че*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

4. Между обема

Задача 14. [7] Върху ръба AB от основата ABC на триъгълна пирамида $ABCO$ е дадена точка M . Равнината β , която минава през точки M и пресича лъча $\vec{OB}$ в точка $B_1 \neq O$ и лъча $\vec{OA}$ в точката $A_1 \neq O$). Обемът на тетраедъра A_1MOC е означен с V_1 , а обемът на тетраедъра B_1MOC е означен с V_2 . Да се докаже, че $\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} = \text{const.}$

Накрая предлагаме задачи за самостоятелна работа.

Задача 15. [2] Противоположните страни на четириъгълника $ABCD$ се пресичат съответно в точки E и F . Правите, прекарани през върховете на четириъгълника, успоредно на дадено направление, пресичат правата EF , съответно в точки A_1, B_1, C_1 и D_1 . Да се докаже, че е в сила релацията $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{DD_1}$.

Задача 16. [8] Вътре в ъгъл A_1OB_1 е дадена точка . Произволна права пресича рамото OA_1 в точка A и рамото OB_1 в точка B . Лицата на триъгълниците OAK и OBK са означени с S_1 и S_2 . Да се докаже, че $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \text{const.}$

Задача 17. В ромба $ABCD$ с дължина на страната $2x$, радиусите на описаните окръжности, около триъгълниците ABC и ABD са R и r . Да се докаже, че $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}$.

Задача 18. Във всеки трапец е в сила зависимостта $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{2}{S}$, където S_1 и S_2 са лицата на триъгълниците, на които диагонала разделя трапеца, а S е лицето на триъгълника с основа едното бедро и връх, пресечната точка на другото бедро с правата, успоредна на основите и минаваща през пресечната точка на диагоналите.

Задача 19. Нека a_i са n на брой положителни числа и $m = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$. Да се докаже, че m е средна величина и да се докаже неравенството $m \geq \bar{m}$, където $\bar{m} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}$.

Задача 20. В триъгълник ABC страните му BC, CA и AB имат дължини съответно a, b и c и дължината на външополовящата му на ъгъл C е l . Ако k е положително число и $l = k.c$, да се докаже, че $\frac{k^2}{ab} + \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{c^2}$.

Задача 21. Даден е триъгълник ABC с лице S . Върху основата AB е взета произволна точка . През върха A е построена правата a , успоредна на CM , която пресича правата BC в точка A_1 и през точка B е построена правата b , също

успоредна на CM , която пресича AC в точка B_1 . Лицата на триъгълниците ABA_1 и ABB_1 са означени съответно с S_1 и S_2 . Нека правите A_1B_1 и CM се пресичат в точка C_1 , AC_1 и b – в точка B_2 , BC_1 и a – в точка A_2 и лицата на триъгълниците ABA_2 и ABB_2 са означени съответно с S_3 и S_4 . Нека правите A_2B_2 и CM се пресичат в точка C_2 , AC_2 и b – в точка B_3 , BC_2 и a – в точка A_3 и лицата на триъгълниците ABA_3 и ABB_3 са съответно S_5 и S_6 . Тези построения продължават до получаването на триъгълниците ABA_n и ABB_n , съответно с лица S_{2n-1} и S_{2n} и т.н. Да се пресметне $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{S}{S_i}$.

Отг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] БЕРОНДО МАРИ. Занимательные задачи. Мир, Москва, 1983 г. Задача 8 на стр. 52.
- [2] А. А. ГУШЕВ. Теорема на Менелай и Чева, ДИ Техника, София, 1967 г., Теорема 52 на стр. 55.
- [3] С. Ц. КОПРИНСКИ, Л. М. ТОПАЛОВ. Задачи по елементарна математика, ДИ Народна просвета, София, 1983 г. Задача 20, стр. 234.
- [4] Х. Н. ЛЕСОВ. *Математика и математическо образование*, **14**, (1985), 694.
- [5] П. С. МОДЕНОВ. Сборник по специалному курсу элементарной математики. Советская наука, Москва, 1957 г., Задача 80 на стр. 356.
- [6] М. Н. НАЙДЕНОВ. Вписана полуокръжност, *Математика*, бр. **9**, 1987 г., Задача 5 на стр. 25.
- [7] М. Н. НАЙДЕНОВ. *Математически форум*, том IV, бр. 1, януари – март 2002 г., Задача 17 на стр. 2.
- [8] З. А. СКОПЕЦ, В. А. ЖАРОВ. Задачи и теореми по геометрии. Учпедгиз, Москва, 1968 г., Задача 522 на стр. 73.
- [9] П. СТОИЛОВ. За подготовка по математика на кандидат-студенти 2002. Пловдив, 2001, Задача 2 на стр. 80 от конкурса на ВВМУ – 2001 г.
- [10] П. СТОИЛОВ. За подготовка по математика на кандидат-студенти 2003. Пловдив, 2002, Задача 4 на стр. 75 от конкурса на ВВМУ – 2002 г.
- [11] П. СТОИЛОВ. За подготовка по математика на кандидат-студенти 2005. Пловдив, 2004, Задача 3 на стр. 88 от конкурса на ВВМУ – 2004 г.
- [12] V. C. BAILEY. *School Science and Mathematics*, **88** (6) Oktober, Problem 4153.

Милен Найденов Найденов
ул. Сан Стефано 2, вх. Б, ап. 11
9000, гр. Варна

ON A RECIPROCAL DEPENDENCE

Milen N. Naydenov

The first part of this paper contains several problems joined by a common idea. Further, a development of this idea is demonstrated using different generalizations. Some original problems are obtained as a result of combinations of these generalizations. Last five problems are described in this paper.