

СУМА ОТ РАЗСТОЯНИЯ ДО ВЪРХОВЕТЕ НА ТРИЪГЪЛНИК И ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Емил Я. Стоянов

Настоящият материал има за цел да подпомогне учителите, занимаващи се с извънкласна работа по математика, като запълни една празнота, свързана с намирането на точки в триъгълник и четириъгълник, за които сумата от разстоянията им до върховете на фигурата достига своя максимум.

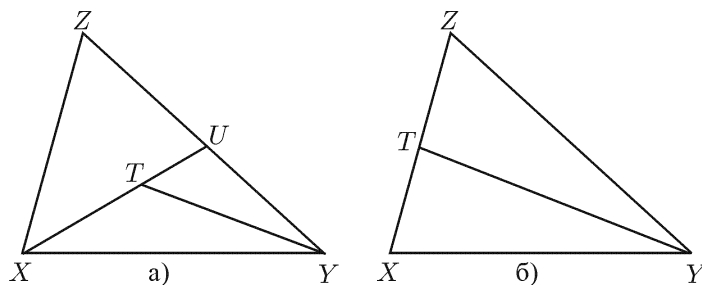
В наличните у нас източници по елементарна математика (сборници, списания, научно-популярни книги и пр.) се срещат често задачите за откриването на точка в триъгълник, за която сумата от разстоянията и до върховете на последния да е минимална и аналогичната такава за четириъгълник. Най-вероятно поради връзката „минимално разстояние – минимални разходи“ неоснователно е пренебрегван въпросът за съществуването и откриването на точки от същите фигури, за които споменатата по-горе сума да е максимална.

В следващото изложение ще се постареем с възможно най-достъпни средства да покажем къде се достига максимумът на функцията $S(X)$, съпоставяща на всяка точка X , която не е външна за триъгълника или четириъгълника, сумата от разстоянията и до върховете на съответната фигура.

Ще започнем с две лема.

Лема 1. Ако T е точка от вътрешността или контура на $\triangle XYZ$, несъвпадаща с връх на триъгълника, то $TX + TY < ZX + ZY$.

Доказателство: Нека T е вътрешна за $\triangle XYZ$ и $XT \cap YZ = U$ (вж. черт. 1а).



Черт. 1

От неравенството на триъгълника получаваме $TY < TU + UY$ и $XU < ZX + ZU$.
Тогава $TX + TY < TX + TU + UY = XU + UY < ZX + ZU + UY = ZX + ZY$,
т.е. $TX + TY < ZX + ZY$.

Ако $T \in ZX$ (черт. 16), то $TX + TY < TX + TZ + ZY = ZX + ZY$. Ако $T \in ZY$,
разсъжденията са аналогични. Ако $T \in XY$, то $TX + TY = XY < ZX + ZY$. С това
лемата е доказана.

Лема 2. Ако в $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB = \gamma \geq 90^\circ$ и $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и
 $CH \perp AB$, $H \in AB$, а $CH = h_c$, то $c + h_c > a + b$ (черт. 2)

Доказателство: От $\gamma \in [90^\circ; 180^\circ)$ следва, че $\frac{\gamma}{2} \in [45^\circ; 90^\circ]$, т.е.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\gamma}{2} &\geq \cos \frac{\gamma}{2} \\ \Downarrow \\ 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} &\geq 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} \text{ (защото } \cos \frac{\gamma}{2} > 0!) \\ \Downarrow \end{aligned}$$

$$(1) \quad \sin \gamma \geq 1 + \cos \gamma.$$

От друга страна $\frac{ch_c}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \sin \gamma$ и от (1) получаваме

$$(2) \quad \frac{ch_c}{2} \geq \frac{ab}{2} \cdot (1 + \cos \gamma).$$

Сега от косинусовата теорема за $\triangle ABC$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab(1 + \cos \gamma)$$

$$\Downarrow$$

$$(3) \quad c^2 + 2ab(1 + \cos \gamma) = (a + b)^2$$

Ще докажем, че $(c + h_c)^2 > c^2 + 2ab(1 + \cos \gamma)$, т.е.

$$c^2 + 2ch_c + h_c^2 > c^2 + 2ab(1 + \cos \gamma) \quad | : 4$$

$$\frac{ch_c}{2} + \frac{h_c^2}{4} > \frac{ab}{2}(1 + \cos \gamma),$$

което следва от (2).

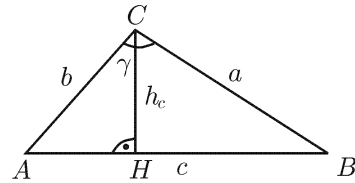
И така $(c + h_c)^2 > c^2 + 2ab(1 + \cos \gamma)$ и от (3)

$$(c + h_c)^2 > (a + b)^2, \quad \text{откъдето}$$

$$c + h_c > a + b.$$

От доказателството на лемата непосредствено следват две неща:

- 1) При условията от лемата, ако $Q \in AB$ и $CQ = m$, то $c + m > a + b$, защото очевидно $m \geq h_c$.



Черт. 2

- 2) Неравенствата от лемата и от предишното следствие са изпълнени и когато $\gamma \in [\varphi; 90^\circ]$, където φ е неизвестно за автора, а определянето му би могло да бъде обект на отделно изследване.

Сега ще докажем следната

Теорема 1. Ако X е точка, която не е вършина за $\triangle ABC$, то $\max S(x) = \max\{S(A); S(B); S(C)\}$, т.е. X трябва да съвпада с върха на най-малкия ъгъл в $\triangle ABC$.

Доказателство: Нека P е вътрешна точка за $\triangle ABC$ (черт. 3).

От $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^\circ$ следва, че поне един от тези ъгли е по-голям или равен на 120° . Да предположим, без да ограничаваме общността, че $\angle APB \geq 120^\circ$ и $CP \cap AB = Q$. От лема 2. за $\triangle ABP$ получаваме $AB + PQ > PA + PB$. Тогава $S(P) = PA + PB + PC < AB + PQ + PC = AB + CQ + S(Q)$, т.е.

$$(4) \quad S(P) < S(Q).$$

От друга страна $S(A) = AB + AC$, $S(B) = AB + BC$, $S(Q) = AB + CQ$ и от известното твърдение, че $CQ \leq \max\{AC; BC\}$ получаваме

$$S(Q) \leq \max\{S(A); S(B)\}, \text{ което заедно с (4) води до}$$

$$S(P) < \max\{S(A); S(B)\} \leq \max\{S(A); S(B); S(C)\}$$

Сега вече лесно се съобразява, че $\max S(X) = \max\{S(A); S(B); S(C)\}$, т.е. $S(X)$ достига своя максимум точно когато X съвпада с върха на най-малкия ъгъл в $\triangle ABC$.

Тук е мястото да отбележим, че на страниците на [1] срещаме друго елементарно доказателство на поставената задача, но цитираният източник е недостъпен за мнозинството от българските учители по математика. Тъй като никъде в [1] не е отбелязана изрична забрана за препечатване, цитиране и прочие, то ще приведем дословно споменатото решение:

„**Теорема:** Ако $AB \leq AC \leq BC$, то за всяка точка M , вътрешна за $\triangle ABC$, е изпълнено $MA + MB + MC < AC + BC$.

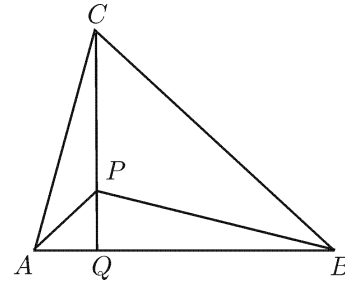
Доказателство: Нека $E \in AC$ и $F \in BC$ са точки, за които $M \in EF$ и $EF \parallel AB$ (черт. 4).

От $\triangle EFC \sim \triangle ABC \Rightarrow EF < EC < FC$, а $MC < FC$, $MA < ME + AE$, $MB < MF + FB$. Тогава

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &< ME + AE + MF + FB + FC \\ &= EF + AE + BC < EC + AE + BC = AC + BC'' \end{aligned}$$

Със сигурност има още такива елементарни решения, чакащи своите откриватели, което дава още по-голяма увереност на автора, че тези въпроси не са за пренебрегване.

Да преминем към търсенето на максимума на $S(X)$ за четириъгълник. Ще докажем следната

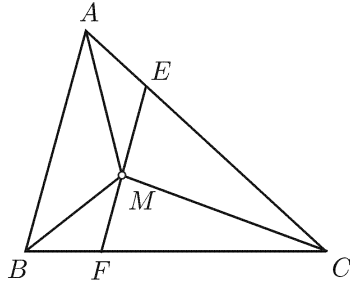


Чертеж 3

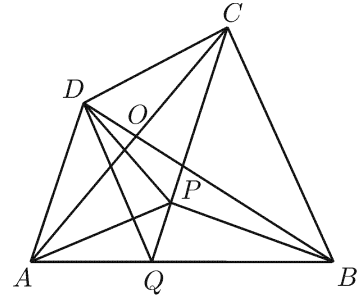
Теорема 2. Ако X е точка от вътрешността или контура на четириъгълник $ABCD$, то $\max S(X) = \max\{S(A); S(B); S(C); S(D)\}$.

Доказателство: Нека в четириъгълника $ABCD$ $AC \cap BD = O$ и точка P е вътрешна за $\triangle ABC$ и $CP \cap AB = Q$ (черт. 5). Ясно е още, че P е вътрешна и за $\triangle QBD$ и от лема 1 получаваме

$$(5) \quad BQ + DQ > BP + DP$$



Черт. 4



Черт. 5

От друга страна $AP + PC < AQ + QP + PC = AQ + CQ$, т.е.

$$(6) \quad AP + PC < AQ + CQ.$$

Но

$$S(P) = AP + BP + CP + DP = (AP + CP) + (BP + DP)$$

$$S(Q) = AQ + BQ + CQ + DQ = (AQ + CQ) + (BQ + DQ)$$

и от (5) и (6) следва, че

$$(7) \quad S(P) < S(Q).$$

Аналогично е доказателството на (7), ако $P \in AO$ или $P \in BO$ ($P \neq O$).

Сега ще докажем, че $S(Q) \leq \max\{S(A); S(B)\}$.

Тъй като $S(A) = AB + AC + AD$, $S(B) = AB + BD + BC$ и $S(Q) = AB + DQ + CQ$, достатъчно е да докажем, че $DQ + CQ \leq \max\{AD + AC; BD + BC\}$.

Да разгледаме осевата симетрия σ_{AB} с ос AB (черт. 6).

Нека $\sigma(D) = D_1$, $\sigma(C) = C_1$. Ясно е, че $\sigma(D_1) = D$ и $\sigma(C_1) = C$, откъдето $\sigma(DC_1) = D_1C$, $\sigma(D_1C) = DC_1$ и следователно $\sigma(DC_1 \cap D_1C) = D_1C \cap DC_1$, т.е. $\sigma(R) = R$, където $R = DC_1 \cap D_1C$, което означава, че $R \in AB$.

Нека сега $Q \in AR$. Тогава Q е вътрешна за $\triangle D_1CA$ и от лема 1

$$(8) \quad CQ + D_1Q < D_1A + AC.$$

Но $\sigma(D) = D_1$ и $\sigma(Q) = Q$, откъдето $DQ = D_1Q$ и аналогично $D_1A = AD$, което заедно с (8) води до $CQ + DQ < AD + AC$.

По същия начин доказваме, че ако $Q \in RB$, то $CQ + DQ < BD + BC$.

Ако $Q \equiv R$, нещата са още по-ясни, защото тогава $CQ + DQ = D_1C < D_1A + AC = AD + AC$.

Така доказахме, че $S(Q) < \max\{S(A); S(B)\}$ и от (7) $S(P) < \max\{S(A); S(B)\}$.

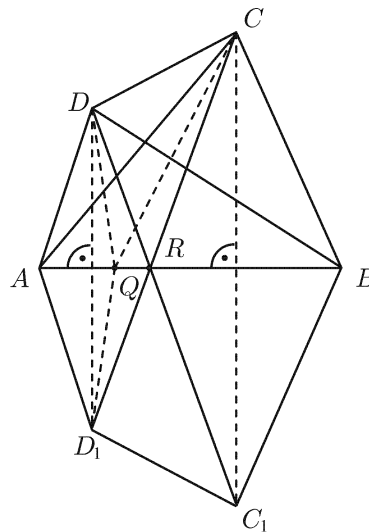
Ако P принадлежи на $\triangle BCO$ или на $\triangle CDO$, или на $\triangle DAO$, разсъжденията са аналогични, т.е. $S(P) < \max\{S(B); S(C)\}$ или $S(P) < \max\{S(C); S(D)\}$, или пък $S(P) < \max\{S(D); S(A)\}$.

Нищо в разсъжденията не се променя съществено и ако P е върху някой от диагоналите. Ако $P \equiv O$, тогава е известно, че $S(O) = \min S(X)$ и още по-ясно $S(P) < \max\{S(A); S(B)\}$.

Сега вече е ясно, че $S(X)$ достига своя максимум, когато P е връх на четириъгълника $ABCD$. Тук, за разлика от триъгълника, остава открит въпросът за намирането на точен критерий, по който да определим кой е този връх.

Логично е да се продължи с търсенето на $\max S(X)$ за петъгълник, шестоъгълник и т.н., но още при петъгълника се сблъскваме с големи трудности при доказателството с елементарни средства на факта, че $S(X)$ достига своя максимум във връх на фигурата. Иначе, добре известно е, че за произволен многоъгълник това е точно така. Доказателството обаче е доста далече от математиката в училище.

С това целта на настоящия материал е изчерпана.



Чертеж 6

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. DANE. On The Open Question 29. *Octagon*, vol. 5, No 1, April 1997, 71.

Емил Янков Стоянов
ул. "Княз Борис І" 45 Б ет. 2 ап. 3
3700 Видин, България
e-mail: estoyanov_vd@abv.bg

SUM OF DISTANCES TO THE VERTICES OF TRIANGLE AND QUADRILATERAL

Emil Stoyanov

The subject of this article is to find points which are not exterior for a triangle and quadrilateral and such that the sum from their distances to the vertices of the figure have a minimal possible value.