

## ГЕОМЕТРИЧНО МОДЕЛИРАНЕ НА БАЗОВИ СЪБИТИЯ И КЛАСИЧЕСКА ВЕРОЯТНОСТ

Н. Хр. Тончева, Хр. В. Вълчев

В работата е предложен геометричен подход при моделирането на базови събития. Разгледани са четири задачи. Предложени са варианти за решение чрез използването на геометрично моделиране. За сравнение е предложено и едно „класическо“ решение е на една от задачите.

Геометричното моделиране на базовите събития при прилагането на класическата формула за вероятност (КФВ) силно намалява риска за неправилно пресмятане на вероятности на събития. От друга страна у учениците се формират умения за ефективно използване на моделирането при решаване на задачи по вероятности.

Често използването на КФВ силно опростява намирането на вероятности и събития. В някои случаи този подход е много по-достъпен от непосредственото прилагане на класическата дефиниция за вероятност (КДВ).

Беше проведен многогодишен експеримент с 1152 студента от Шуменския и Великотърновския университети, който е описан в [1]. Резултатите недвусмислено сочат предимството на КФВ пред КДВ. След внимателното проучване на 572 контролни работи, съдържащи едни и същи 5 задачи с посочено изискване за ползване на КФВ беше установено, че и в този случай част от студентите прилагат неправилно КФВ. Основната, допускана грешка е, че при пресмятането на  $P(A)$  в числителя се поставя броя на благоприятстващите  $A$  базови събития на една пълна група, а в знаменателя броя на всички базови събития на друга такава. Причина за такъв род грешки е, че понякога съществуват няколко базови за  $A$  пълни групи равновъзможни събития, а учащите се забравят, че и в числителя и в знаменателя, трябва да фигурират съответно: благоприятстващите за  $A$  и всички базови събития на една и съща, предварително избрана, базова за  $A$  група.

За да се изключи допускането на такива грешки, се предлага следният алгоритъм при пресмятането на  $P(A)$ :

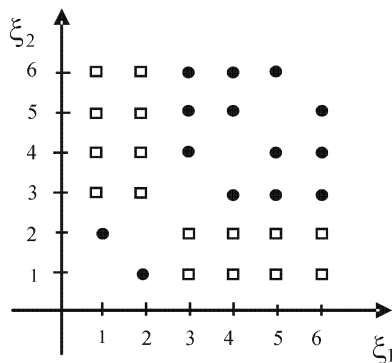
1. Намира се подходяща пълна група *равновъзможни* събития, която е базова за  $A$ .
2. На всяко едно от събитията на тази група се съпоставя взаимно и еднозначно геометрична точка.
3. Преброяват се всички точки в този геометричен модел ( $N$ ).
4. Преброяват се всички точки, моделиращи благоприятстващите за  $A$  базови събития ( $M(A)$ ).

5. Като се приложи КФВ [1] ще се получи, че  $P(A) = \frac{M(A)}{N}$

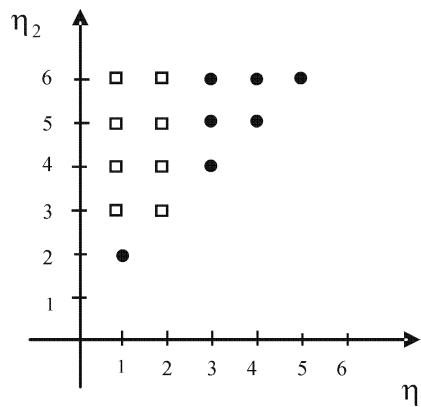
Със следващите задачи ще илюстрираме този начин за пресмятане на вероятности на случайни събития.

**Задача 1.** В урна има 2 бели и 4 черни топки. Последователно, по случаен начин, без връщане се вадят 2 топки. Намерете вероятността на събитието  $A$  – извадените топки са разноцветни.

**Решение:** За определеност ще номерираме белите топки с числата 1 и 2, а черните – 3, 4, 5 и 6. Ако означим с  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) номера на  $i$ -та извадена топка, то точките с декартови координати  $(\xi_1, \xi_2)$ , където  $\xi_1 \neq \xi_2$  и  $\xi_i$  са целите, положителни числа по-малки или равни на 6 моделират 30-те елементарни събития. На фиг. 1 с  $\square$  са моделирани 16-те благоприятстващи  $A$  елементарни събития. Като приложим КДВ ще получим  $P(A) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Ще предложим и друг начин за моделиране на същата задача, при който резултатът се открива лесно.

Да означим с  $\eta_1$  и  $\eta_2$  ( $\eta_1 < \eta_2$ ) номерата на извадените топки, записани във възходящ ред. Точките с декартови координати  $(\eta_1, \eta_2)$ , където  $(\eta_1 < \eta_2)$ , а  $\eta_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  моделират 15-те базови за  $A$  събития, всяко едно от които дава информация за избраните две топки, но не дава информация за реда на изваждането им. На фиг. 2 с  $\square$  са моделирани благоприятстващи  $A$  базови събития. Като приложим КФВ ще получим  $P(A) = \frac{8}{15}$ .

Тази задача би могла да се реши бързо и с непосредственото прилагане на КДВ, но рискът от грешки и формализиране на решението е много голям.

През септември на 2004 тази задача беше предложена на анонимно контролно на 161 студента от специалност „Икономика“ – задочно обучение на ШУ „Епископ К. Преславски“. Студентите бяха разделени на две подгрупи (81 с нечетни факултетни номера и 80 с четни). На първата група беше предложено да решат задачата без прилагане на геометрично моделиране, а на втората със задължително прилагане на моделиране.

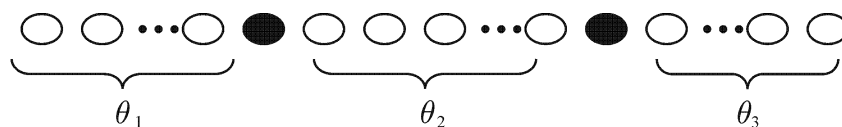
Получените резултати бяха следните:

| Група | Празни листа | Неправилно решение | Вярно решение |
|-------|--------------|--------------------|---------------|
| I     | 17           | 51                 | 13            |
| II    | 19           | 0                  | 61            |

Основната грешка на студентите от първа група беше, че при пресмятането на  $P(A)$  в знаменателя беше написан броя на събитията на една пълна базова за  $A$  група събития, а в числителя броя на благоприятстващи  $A$  събития от друга група. При геометричното моделиране такава грешка е невъзможна.

При следващата задача ще демонстрираме две решения с и без моделиране.

**Задача 2.** Всички топки от урна, в която има 24 бели и 2 черни топки, се вадят последователно без връщане. С  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$  са означени броевете на белите топки, които се появяват съответно преди първата, след първата, но преди втората и след втората черна топка (фиг. 3).



Фиг. 3

Намерете вероятностите на събитията:

- 1)  $\theta_1 = \theta_2$ . Отг.  $P(\theta_1 = \theta_2) = \frac{13}{325}$
- 2)  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ . Отг.  $P(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3) = \frac{1}{325}$
- 3)  $\theta_1 < \theta_2$ . Отг.  $P(\theta_1 < \theta_2) = \frac{12}{325}$
- 4)  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ . Отг.  $P(\theta_1 < \theta_2 < \theta_3) = \frac{48}{325}$
- 5)  $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$
- 6)  $\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$ . Отг.  $P(\theta_1 = \theta_2 + \theta_3) = P(\theta_1 = 12) = \frac{13}{325}$
- 7)  $\theta_2 > 5$ . Отг.  $P(\theta_2 \geq 5) = \frac{210}{325}$

**Решение (без модел):** С всяко елементарно събитие може еднозначно да се съпостави пермутацията  $(i_1, i_2, \dots, i_{26})$ , където  $i_k$  е номерът на  $k$ -тата извадена топка. От тук следва, че броят на елементарните събития е  $26!$ . Вероятността на събитието  $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$  може да се намери с помощта на КДВ, но преброяването на благоприятстващите събития е трудна задача дори за много добри ученици.

Друг вариант за решаването на тази задача е използването на КФВ.

Пълната група  $(\theta_1 = i, \theta_2 = j, \theta_3 = k)$ , където  $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 0, i + j + k = 24$  е базова за всяко едно от седемте събития, чиито вероятности се търсят.

Базовите събития са толкова, по колкото начина числото 24 може да се представи като сума от три цели, неотрицателни числа. Като се възползваме от идеите на геометричното моделиране в [4], може лесно да се докаже, че броят на посочените по-горе събития е  $C_{26}^2 = 325$ . Очевидно тези 325 събития са равновъзможни.

Групата  $(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3)$ ,  $(\theta_1 = \theta_2, \theta_3 \neq \theta_1)$ ,  $(\theta_1 = \theta_3, \theta_3 \neq \theta_2)$ ,  $(\theta_2 = \theta_3, \theta_2 \neq \theta_1)$ ,  $(\theta_1 < \theta_2 < \theta_3)$ ,  $(\theta_1 < \theta_3 < \theta_2)$ ,  $(\theta_2 < \theta_1 < \theta_3)$ ,  $(\theta_3 < \theta_1 < \theta_2)$ ,  $(\theta_2 < \theta_3 < \theta_1)$ ,  $(\theta_3 < \theta_2 < \theta_1)$  е пълна, откъдето следва, че сумата от вероятностите на тези събития е равна на 1.  $P(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3) = \frac{1}{325}$ , тъй като единственото благоприятстващо базово на събитието  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$  е  $(\theta_1 = 8, \theta_2 = 8, \theta_3 = 8)$ .

Дванадесетте благоприятстващи базови събития за  $(\theta_1 = \theta_2, \theta_3 \neq \theta_1)$  са:

|            |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |    |    |    |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|----|----|----|
| $\theta_1$ | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $\theta_2$ | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $\theta_3$ | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4  | 2  | 0  |

С помощта на КФВ ще получим  $P(\theta_1 = \theta_2, \theta_3 \neq \theta_1) = \frac{12}{325}$ . Аналогично се доказва, че  $P(\theta_1 = \theta_3, \theta_2 \neq \theta_1) = P(\theta_2 = \theta_3, \theta_2 \neq \theta_1) = \frac{12}{325}$ . Последните 6 от разглежданите по-горе 10 събития са равновъзможни. Ако означим с  $x$  общата неизвестна вероятност на тези 6 събития, ще получим  $\frac{1}{325} + 3 \cdot \frac{12}{325} + 6x = 1$ , откъдето получаваме  $x = \frac{48}{325}$ . Аналогично можем да намерим и  $P(\theta_1 = \theta_2 < \theta_3)$  и  $P(\theta_1 < \theta_2 = \theta_3)$ .

С помощта на формулата за събиране на вероятностите ще получим, че

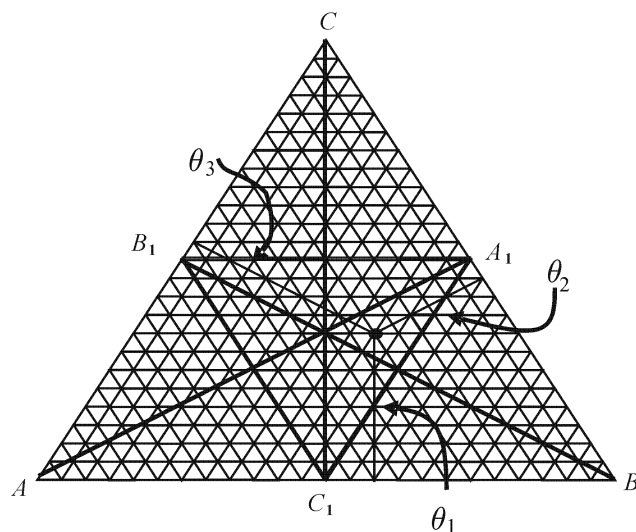
$$\begin{aligned}
 P(\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3) &= \\
 &= P\{(\theta_1 < \theta_2 < \theta_3) \cup (\theta_1 = \theta_2 < \theta_3) \cup (\theta_1 < \theta_2 = \theta_3) \cup (\theta_1 = \theta_2 = \theta_3)\} = \\
 &= P(\theta_1 < \theta_2 < \theta_3) + P(\theta_1 = \theta_2 < \theta_3) + P(\theta_1 < \theta_2 = \theta_3) + P(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3) = \\
 &= \frac{48}{325} + \frac{8}{325} + \frac{4}{325} + \frac{1}{325} = \frac{61}{325}
 \end{aligned}$$

**Решение (с модел):** За да моделираме базовите събития от задачата, ще използваме известното свойство на равностранный триъгълник, че сборът от разстоянията от вътрешна или контурна точка от триъгълника до трите му страни е равен на височината му.

За нашия модел ще използваме равностраничен  $\triangle ABC$  с височина  $h$  (фиг.4). Ще прекараме, успоредни на трите му страни прави на разстояния съответно  $0, \frac{h}{24}, \frac{2h}{24}, \dots, \frac{23h}{24}, \frac{24h}{24}$ . Тези 75 прави ще определят 325 точки  $(1 + 2 + 3 + \dots + 25)$ . Всяка от тези точки моделира точно едно от събитията на горепосочената базова група. За удобство ще приемем, че  $h = 24$ , а  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  са разстоянията съответно до  $AB, BC$  и  $CA$ .

**Забележка:** С кръгче е моделирано събитието  $(\theta_1 = 8, \theta_2 = 6, \theta_3 = 10)$

От тук нататък решението на задачата се свежда до правилното преброяване на точките, моделиращи благоприятстващите събития и прилагането на КФВ.



Фиг. 4

Примерно за пето подусловие – точките, моделиращи благоприятстващите  $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$  базови събития лежат на или под ъглополовящата  $BB_1$  и на или отляво на ъглополовящата  $CC_1$ . Чрез непосредствено преброяване се вижда, че точките са 61. Като приложим КФВ получаваме  $P(\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3) = \frac{61}{325}$ .

Аналогично се постъпва при другите подусловия.

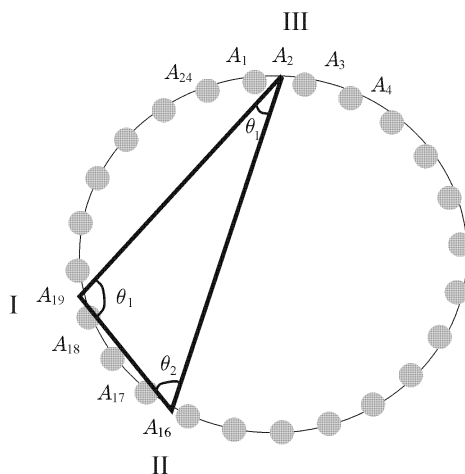
**Задача 3.** Последователно, по случаен начин се избират три от върховете на правилен 24-ъгълник. Намерете вероятността на събитието – триъгълникът, определен от избраните точки е:

- |                                         |                                                      |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------|
| А. равностранен.                        | Отг. $P(A) = \frac{1}{253}$                          |
| В. равнобедрен.                         | Отг. $P(B) = \frac{31}{253}$                         |
| С. равнобедрен, но неравностранен.      | Отг. $P(C) = \frac{30}{253}$                         |
| Д. неравнобедрен.                       | Отг. $P(D) = \frac{253 - 30}{253} = \frac{20}{23}$   |
| Е. правоъгълен.                         | Отг. $P(E) = \frac{33}{253} = \frac{3}{23}$          |
| Ф. тъпоъгълен.                          | Отг. $P(F) = \frac{3 \cdot 55}{253} = \frac{15}{23}$ |
| Г. остроъгълен.                         | Отг. $P(G) = \frac{55}{253} = \frac{5}{23}$          |
| Н. с ъгли, по-малки от $37^\circ 30'$ . | Отг. $P(H) = \frac{5}{253}$                          |

|                                 |                               |
|---------------------------------|-------------------------------|
| I. неравнобедрен и тъпоъгълен   | Отг. $P(K) = \frac{150}{253}$ |
| J. неравнобедрен и остроъгълен. | Отг. $P(J) = \frac{42}{253}$  |
| K. неравнобедрен и правоъгълен. | Отг. $P(K) = \frac{30}{253}$  |

**Решение:** Нека означим ъгъла на триъгълника (в градуси), определен от избраните три точки при  $i$ -тата избрана точка с  $\theta_i$  за  $i = 1, 2, 3$ .

От свойствата на описаните окръжности следва, че възможните значения за  $\theta_i$  са кратни на  $\alpha = 7^\circ 30'$ . На фиг. 5 е изобразено базовото събитие ( $\theta_1 = 105^\circ$ ,  $\theta_2 = 52^\circ 30'$ ,  $\theta_3 = 22^\circ 30'$ ). Общо базовите събития са 48.



Фиг. 5

Разумно е да бъде избрана пълна група събития ( $\theta_1 = i\alpha$ ,  $\theta_2 = j\alpha$ ,  $\theta_3 = k\alpha$ ), където  $i \geq 1$ ,  $j \geq 1$ ,  $k \geq 1$ ,  $i + j + k = 24$ . Тези събития са равновъзможни и базови за 11-те събития, определени от подточките на задачата.

Геометричният модел (подобно на задача 2) ще осъществим чрез равностранен  $\triangle ABC$  с височина 180. Ще прекараме, успоредни на трите му страни прави на разстояния съответно  $\alpha, 2\alpha, \dots, 23\alpha$ . Учениците сами могат да докажат, че 69-те прави определят 253 ( $1 + 2 + \dots + 22$ ) вътрешни за  $\triangle ABC$  точки, всяка от които моделира точно едно от базовите събития.

Ако използваме означенията от фиг. 4, то точките моделиращи благоприятстващите  $J$  базови събития, не лежат на ъглополовящите на триъгълника и са извън  $\triangle A_1 B_1 C_1$ . Техния брой е 150. От там директно прилагаме КФВ.

**Задача 4.** На метален проводник, дълъг 24 см с краища  $A_0$  и  $A_{24}$  са разположени (отляво надясно) точките  $A_1, A_2, \dots, A_{23}$ , които го разделят на 24 равни части.

От точките  $A_1, A_2, \dots, A_{23}$  последователно, по случаен начин се избират 2 различни точки, които ще разделят проводника на три части. Ще означим техните

дължини (отляво надясно) с  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$ . Намерете вероятностите на събитията – ако прегънем проводника в избраните точки и съединим  $A_0$  и  $A_{24}$  ще се получи:

|                                    |                                             |
|------------------------------------|---------------------------------------------|
| A. равностранна триъгълна рамка.   | Отг. $P(A) = \frac{1}{253}$                 |
| B. равнобедрена триъгълна рамка.   | Отг. $P(A) = \frac{13}{253}$                |
| C. неравнобедрена триъгълна рамка. | Отг. $P(C) = \frac{42}{253}$                |
| D. триъгълна рамка.                | Отг. $P(D) = \frac{55}{253} = \frac{5}{23}$ |

**Решение:** Броят на елементарните събития е  $V_{23}^2 = 23 \cdot 22 = 506$ . Те биха могли да се моделират като точки с декартови координати  $(\xi_1, \xi_2)$ , където  $\xi_i$  е разстоянието от  $A_0$  до  $i$ -та избрана точка,  $i = 1, 2$ .

Задачата ще се реши по-лесно, ако изберем за базови – равновъзможните събития  $(\theta_1 = i, \theta_2 = j, \theta_3 = k)$ , където  $i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, i + j + k = 24$ . И в тази задача използваме модела от фиг. 4. Събитието се моделира с точки чиито разстояния съответно до  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  са  $i$  см,  $j$  см и  $k$  см. С кръгчето е означено събитието  $(\theta_1 = 8 \text{ см}, \theta_2 = 6 \text{ см}, \theta_3 = 10 \text{ см})$ . За да може да се образува триъгълна рамка трябва да са изпълнени неравенствата на триъгълника –  $\theta_1 + \theta_2 > \theta_3$ ,  $\theta_1 + \theta_3 > \theta_2$  и  $\theta_3 + \theta_2 > \theta_1$ , които са еквивалентни на  $\theta_1 < 12$ ,  $\theta_2 < 12$  и  $\theta_3 < 12$ , т.е. точките, моделиращи благоприятстващите  $D$  базови събития, лежат в  $\Delta A_1 B_1 C_1$  и техния брой е 55. От там директно прилагаме КФВ.

Голяма част от задачите за търсене на вероятност в учебниците и сборниците могат да бъдат решени по описания по-горе начин. Подобни задачи могат да бъдат намерени в [2], [3]. Учителите сами биха могли да съставят подобни задачи, съответстващи на нивото на подготовка на техните ученици.

Предложеният метод изисква добра геометрична подготовка, въображение и анализаторски умения от учениците. Методът изисква повече време поради, което е подходящ за профилирани паралелки и за извънкласни форми на обучение. При успешна демонстрация от страна на учителя, учениците ще усвоят и предпочетат този метод при решаването на определен клас задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хр. В. Вълчев. Мястото на класическата формула за вероятност в училищния курс по математика. *Математика и мат. образование*, **33** (2004), 306–310.
- [2] Л. ПОРТЕВ и колектив. Алгебра, Летера, 2003.
- [3] Л. ПОРТЕВ Л. и колектив. 20 примерни теми за матура с решения, Летера, 2003.
- [4] Н. ТОНЧЕВА. Геометричен подход при извеждане на формулата за броя на комбинации без повторения. Сборник от конференцията, посветена на 150 години от рождението на Анри Поанкаре, 2004, Шумен (под печат).

Шуменски Университет „Епископ Константин Преславски“  
Факултет по математика и информатика  
ул. „Университетска“ 115  
9712 Шумен, България  
e-mail: natalia\_1@abv.bg  
e-mail: h\_valchev@mail.bg

## **GEOMETRY MODELS OF BASIC EVENTS AND CLASSICAL PROBABILITY**

**N. Hr. Toncheva, Hr. V. Valchev**

In the paper is shown a simple approach in solving probability problems by using geometry models. It is offered to practice this geometry approach of working out the problems with students with low interest in mathematics.

Four problems are given with their complete solutions. It is shown the difference between the “classic” solution and the solution in which geometry simulation is used.