

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2006  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2006  
*Proceedings of the Thirty Fifth Spring Conference of  
the Union of Bulgarian Mathematicians  
Borovets, April 5–8, 2006*

**ОПТИМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА МАНДАТИТЕ НА  
ПАРТИИТЕ ЗА 40. НАРОДНО СЪБРАНИЕ ПО  
ИЗБИРАТЕЛНИ РАЙОНИ**

**Камен Г. Иванов, Николай К. Киров, Никола И. Янев**

На изборите за 40. Народно събрание 7 партии събраха повече от 4% от действителните гласове на избирателите и участваха в разпределението на 240 мандати. Според избирателния закон [1] мандатите бяха разделени между тези партии по метода на Д'Ондт. След това получените мандати на партиите трябваше да бъдат разпределени по избирателни райони. Това стана според приета от ЦИК методика [4] и предизвика основателно недоволство от обществеността [5], защото сериозно беше нарушен принципът за права пропорционалност на получените гласове и разпределените мандати на партиите в даден район.

В настоящата работа се формулират и решават няколко оптимизационни модела за тази задача. Показано е, че методиката на ЦИК дава оптимално решение (едно от много) за някои от моделите. Също така са намерени и по-добри решения, като в модела за най-малко квадратично отклонение от пропорционалността решението е единствено.

**Задача за разпределение на мандатите по партии**

Дадени са  $p$  партии ( $p = 7$ ), които събират повече от 4% от действителните гласове на изборите за 40. Народно събрание. Означаваме партиите с 3@, 6@, 8@, 12@, 14@, 17@ и 19@ (съгласно номерацията на ЦИК). Нека на изборите  $i$ -тата партия е получила общо  $V_i$  действителни гласове,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Мандатите за Народно събрание (с 240 депутати) на тези партии трябва да се определят пропорционално на получените гласове по метод на Д'Ондт [1]. Тази задача може да се формулира по следния начин:

Дадени са  $p$  неотрицателни числа  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , и цяло число  $M$ . Търсим цели  $n_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , такива че

$$\sum_{i=1}^p n_i = M$$

и  $\{n_i\}$  да са “пропорционални” на  $\{V_i\}$ . Тук понятието “пропорционални” означава, че отношенията  $V_i/n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , са максимално “близки”. Но както е добре известно има различни математически определения за близост, които пораждат и различни пропорционални методи.

Например, решението по *метода на Д'Ондт* се определя от условието “минималната цена на мандата е максимална”, т.е. решение на следната оптимизационна задача:

$$\min_i \frac{V_i}{n_i} \rightarrow \max.$$

Необходимо и достатъчно условие числата  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , да са решение на тази (едномерна) задача по метода на Д'Ондт е

$$\min_i \frac{V_i}{n_i} \geq \max_i \frac{V_i}{n_i + 1}.$$

Полученото решение за тези избори е:

| No<br>$i$ | партия | гласове<br>$V_i$ | мандати<br>$n_i$ |
|-----------|--------|------------------|------------------|
| 1         | 3@     | 1129196          | 82               |
| 2         | 6@     | 725314           | 53               |
| 3         | 8@     | 234778           | 17               |
| 4         | 12@    | 189268           | 13               |
| 5         | 14@    | 296848           | 21               |
| 6         | 17@    | 467400           | 34               |
| 7         | 19@    | 280323           | 20               |
|           | Общо   |                  | 240              |

Това е и разпределението на ЦИК на мандатите по партиите [2].

Решението по *метода на Сент Лагьо* се определя от условието

$$\min_i \frac{V_i}{\max\{n_i - 1/2, 0\}} \rightarrow \max.$$

Този метод се прилага например в Германия. В Швеция се прилага *модифициран* метод на Сент Лагьо – когато  $n_i = 1$ , знаменателят е 0.7 (вместо 0.5). Това са примери за методи с делители. Друга голяма група пропорционални методи са тези на “максималния остатък”. Характерно за всички прилагани сега пропорционални методи е, че дават почти еднакви резултати, когато параметрите на задачата са както в българските парламентарни избори – общ брой мандати над 100 и поне 10 мандата за всяка партия в парламента.

Едно от нарушенията на пропорционалността, което се възприема интуитивно от хората, води до правилото “не може с по-малко гласове да получиш повече мандати”. Математическото понятие за това е “монотонност”, която се определя с неравенствата  $(V_i - V_k)(n_i - n_k) \geq 0$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, p$ . Трябва да отбележим, че всички използвани днес пропорционални методи за решаване на едномерната задача са монотонни.

### Задача за разпределение на мандатите на партиите по райони

Дадени са  $r$  избирателни района ( $r = 31$ ), като за всеки район е определен предварително броят на мандатите  $m_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  в този район – по закон пропорционално на населението му [1]. Броят на мандатите в избирателните райони са:

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:  
10 13 14 9 4 7 4 7 5 5 5 6 9 5 10 10 11 5 8 4 7 4 13 11 12 8 11 4 8 6 5

Задачата е да се разпределят получените мандати на партиите по изборителните райони, ако са известни гласовете на партиите по райони. Нека  $x_{ij}$  са мандатите на  $i$ -тата партия в  $j$ -тия район от търсеното разпределение. Тогава трябва да бъдат изпълнени равенствата:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^r x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

като  $x_{ij}$  са цели неотрицателни числа. Тези ограничения са същите както при целочислена транспортна задача.

Получените действителни гласове образуват матрицата на гласа с елементи  $v_{ij}$  – броят на гласовете на  $i$ -тата партия в  $j$ -тия район,  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots, r$ . За опростяване на аргументацията ще решаваме задачата при следните две предположения за участващите в разпределението партии:

- Всяка партия има регистрация във всички изборителни райони с достатъчно дълга партийна листа.
- Всяка партия получава поне един глас във всеки изборителен район, т.е.  $v_{ij} > 0$  за всички  $i$  и  $j$ .

Получените действителни гласове са публикувани в [2] и са следните:

|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01: | 02:   | 03:   | 04:   | 05:   | 06:   | 07:   | 08:   | 09:   | 10:   | 11:   | 12:   | 13:   | 14:   | 15:   |       |
| 3@  | 34771 | 56050 | 55942 | 45205 | 24545 | 38996 | 19817 | 35478 | 17746 | 27685 | 25531 | 30826 | 39100 | 23444 | 52499 |
| 6@  | 28448 | 35201 | 60248 | 27521 | 10869 | 19679 | 16417 | 21457 | 4870  | 16955 | 16765 | 15824 | 23978 | 15455 | 26851 |
| 8@  | 7376  | 8683  | 13130 | 7247  | 2594  | 3685  | 4025  | 4002  | 1064  | 3762  | 4538  | 2461  | 5560  | 3839  | 6470  |
| 12@ | 7497  | 7468  | 11707 | 7357  | 2795  | 6515  | 3622  | 5955  | 540   | 2818  | 3793  | 3138  | 7089  | 2889  | 8609  |
| 14@ | 6142  | 20679 | 17920 | 15272 | 2608  | 6808  | 6303  | 7748  | 2229  | 3065  | 6485  | 4418  | 9163  | 4029  | 14165 |
| 17@ | 25472 | 28557 | 18916 | 6121  | 8026  | 1213  | 4041  | 14058 | 63570 | 978   | 5658  | 3047  | 14829 | 261   | 10238 |
| 19@ | 14899 | 12697 | 15427 | 10226 | 4327  | 6771  | 6459  | 3926  | 1975  | 4844  | 5867  | 6514  | 12725 | 7058  | 11920 |

|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 16: | 17:   | 18:   | 19:   | 20:   | 21:   | 22:   | 23:   | 24:   | 25:   | 26:   | 27:   | 28:   | 29:   | 30:   | 31:   |       |
| 3@  | 42434 | 54575 | 15975 | 33400 | 23262 | 28006 | 18308 | 62206 | 47318 | 53267 | 40210 | 56809 | 22528 | 42585 | 26972 | 27581 |
| 6@  | 42996 | 33498 | 9549  | 25945 | 10162 | 14878 | 9813  | 43311 | 36011 | 35644 | 20860 | 28980 | 6262  | 23826 | 16018 | 13591 |
| 8@  | 14105 | 6027  | 1430  | 7050  | 1360  | 3363  | 4097  | 36536 | 29869 | 20693 | 5607  | 9435  | 2493  | 4452  | 2468  | 2324  |
| 12@ | 7678  | 7474  | 1772  | 7396  | 1805  | 4363  | 5365  | 11129 | 13133 | 13636 | 5612  | 9848  | 2759  | 8505  | 2050  | 3472  |
| 14@ | 12946 | 12314 | 5133  | 15125 | 4250  | 7941  | 2461  | 16992 | 15437 | 17554 | 11590 | 15325 | 5897  | 10033 | 10412 | 4837  |
| 17@ | 11797 | 15331 | 36435 | 14483 | 27514 | 8414  | 9060  | 899   | 4097  | 954   | 4712  | 8929  | 28610 | 21156 | 27455 | 1943  |
| 19@ | 21187 | 15060 | 2290  | 10558 | 2130  | 5745  | 5624  | 20148 | 15336 | 14911 | 7296  | 12046 | 2003  | 6535  | 6065  | 4207  |

В таблицата не са дадени гласовете от чужбина, които не участват в разпределението на мандатите на партиите по райони.

Задачата се формализира по следния начин: Дадени са неотрицателни числа  $v_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , и цели числа  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  и  $m_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , такива че  $\sum_{i=1}^p n_i = \sum_{j=1}^r m_j = M (= 240)$ . Търсим цели неотрицателни числа  $x_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , такива че да е в сила (1) и  $\{x_{ij}\}$  да са “пропорционални” на  $\{v_{ij}\}$ .

Отново, както и при едномерната задача, понятието “пропорционални” не е добре определено. Характерна особеност на двумерната задача е, че прилагането на аналогии на едномерните пропорционални методи води до резултати, нарушаващи интуитивните разбирания за добро решение. Например, решението може да е немонотонно (за някои партии или в някои райони), максималната и минималната цени на мандатите може да са много различни и т.н. Тези проблеми са присъщи на двумерната

задача – за определени начални данни (получаващи се естествено при избори) не може да имаме монотонност и достатъчно близки цени на мандатите!

В настоящата статия са формулирани и решени редица задачи, представляващи двумерната задача плюс оптимизационно условие. При обсъждането на кой да е метод, предложен за решаване на двумерната задача, той може да бъде оценен като полученото решение се сравни доколко е далеч от най-добрите възможни решения (спрямо различните критерии). В случая това е методът на ЦИК.

Понятието “метод на Д’Ондр” е приелото гражданственост у нас по отношение на двумерната задача. В действителност Виктор Д’Ондр, който е белгийски юрист и математик, живял през XIX век, е предложил решение на едномерната задача и никога не е решавал двумерната задача. Методът, използван от ЦИК за решаване на двумерната задача, е създаден от неизвестен (и срамежлив) български математик или юрист за изборите за ВНС през 1990 г.

Преди да формулираме оптимизационни задачи, ще дадем разпределението на мандатите според методиката на ЦИК [4]. Методиката за разпределяне на мандатите на партиите по райони е използвана за първи път у нас в пропорционалната част на изборите за Велико Народно Събрание през 1990 г. Оттогава тя е претърпяла редица допълнения и уточнения, но алгоритъмът, създаден през 1990 г., би дал същите мандати за гласовете, получени на всички парламентарни избори от 1991 г. до сега.

Разпределението на ЦИК означаваме с  $X_0$  и то е:

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:  
3@ 2 3 3 3 3 5 2 3 0 3 3 4 4 3 4 2 3 1 2 1 3 2 1 1 3 5 5 1 2 1 4  
6@ 2 2 4 2 1 2 2 2 0 2 2 2 2 2 2 2 3 0 2 0 2 1 2 2 2 2 2 0 2 1 1  
8@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 5 4 2 0 1 0 0 0 0  
12@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0  
14@ 0 2 2 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 2 1 2 1 1 0 1 1 0  
17@ 2 3 1 0 0 0 0 1 5 0 0 0 1 0 1 1 1 4 1 3 1 1 0 0 0 0 0 3 2 3 0  
19@ 2 1 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 2 2 0 1 0 0 0 2 2 2 0 1 0 0 0 0

Накратко, методиката на ЦИК [4] е следната: най-напред мандатите на всяка партия се разпределят пропорционално на получените гласове по районите (по Д’Ондр). Тъй като сумата от мандатите на различните партии в един район (изобщо) не е равна на определените мандати за този район, то се прави преразпределение на мандатите по районите в рамките на всяка партия.

Защо това разпределение не ни харесва? Следващите примери, където са дадени получени гласове - получени мандати в някои райони и за някои партии, са илюстрация на получените несъответствия.

Примери по райони:

| Район → | 23:     | 24:     |
|---------|---------|---------|
| 3@      | 62206 1 | 47318 1 |
| 6@      | 43311 2 | 36011 2 |
| 8@      | 36536 5 | 29869 4 |

| Район → | 09:     |
|---------|---------|
| 3@      | 17746 0 |
| 17@     | 63570 5 |

Примери по партии:

| Партия | 6:      | 17:     | 23:     |
|--------|---------|---------|---------|
| 3@     | 38996 5 | 54575 3 | 62206 1 |
| 6@     | 19679 2 | 33498 3 | 43311 2 |

Кое е “хубаво” разпределение? Няма най-добър критерий за това – зависи от модела. Във всеки конкретен модел се задава критерий, според който се намира оптимално решение.

### Модел 1.

Ограниченията на задачата са същите както на добре известната транспортна задача. Правим модел, аналогичен на транспортна задача. Как да определим “цените на превозите”, за да минимизираме “транспортните разходи”? Тъй като връзката между гласове и мандати трябва да е правопрпорционална, т.е. за повече гласове се получават повече мандати, разумно е “транспортните разходи” в нашия модел да са обратно пропорционални на броя гласове. По този начин целевата функция (общите “транспортни разходи”) е:

$$(2) \quad F_1(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \frac{x_{ij}}{v_{ij}}.$$

Задачата е:  $\min F_1(X)$  при ограничения (1). Полученото оптимално решение  $X_1$  е дадено в следната таблица:

|     |                                                                                               |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
|     | 01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31: |
| 3@  | 0 0 0 0 4 7 0 7 0 5 5 6 0 5 10 0 0 0 0 0 7 4 0 0 0 8 5 0 4 0 5                                |
| 6@  | 0 0 14 9 0 0 4 0 0 0 0 0 9 0 0 0 11 0 0 0 0 0 0 0 0 0 6 0 0 0 0                               |
| 8@  | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 10 0 0 0 0 0 0                                  |
| 12@ | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 12 0 0 0 0 0 0                                |
| 14@ | 0 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0                                  |
| 17@ | 6 0 0 0 0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 0 0 0 5 0 4 0 0 0 0 0 0 0 4 4 6 0                                 |
| 19@ | 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 6 0 0 0 0 0 0 0 0                                |

със стойност на целевата функция  $F_1(X_1) = 0.00908$ . Очевидно това решение е неприемливо, защото мандатите в един район се дават само на една или две партии. Това може да бъде избягнато, ако поставим горни граници за променливите, напр.  $x_{ij} \leq 6$ . Целевата функция малко нараства (до 0.0094), но решението пак остава незадоволително.

За решението на ЦИК получаваме  $F_1(X_0) = 0.01165$ .

### Модел 2.

Максимизираме най-малката цена на мандата. Цената на мандата за  $i$ -тата партия в  $j$ -тия район е  $\frac{v_{ij}}{x_{ij}}$ . Получаваме

$$(3) \quad \min_{i,j} \frac{v_{ij}}{x_{ij}} \rightarrow \max.$$

За да избегнем безкрайни стойности и да линейаризираме модела, вземаме реципрочна стойност на цената на мандата.

$$(4) \quad F_2(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \rightarrow \min.$$

Едно оптимално решение е:

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:  
3@ 5 7 6 6 3 5 2 4 0 4 3 4 5 3 2 0 1 0 0 1 4 2 0 0 0 5 1 0 3 2 4  
6@ 4 0 0 1 0 2 2 3 0 1 2 2 0 1 3 4 4 0 3 0 1 1 3 2 5 1 4 0 3 0 1  
8@ 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 5 4 3 0 1 0 0 0 0  
12@ 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0  
14@ 0 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 0 2 0 1 0 2 2 2 1 2 0 1 1 0  
17@ 1 1 2 0 1 0 0 0 5 0 0 0 2 0 1 0 2 5 1 3 1 1 0 0 0 0 1 4 0 3 0  
19@ 0 1 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 3 2 0 1 0 0 0 2 2 1 1 1 0 0 0 0 0  
със стойност на целевата функция  $F_2(X_2) = 0.00014502$ . То се достига в (3@, 31:),  
т.е.

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{1\ 31}}{v_{1\ 31}} = \frac{4}{27581} = 0.00014502.$$

За решението на ЦИК получаваме  $F(X_0) = F(X_2)$  и то също е оптимално решение на този модел.

### Модел 3.

Минимална разлика между най-големи и най-малки цени на мандати. Както и в Модел 2, работим с реципрочните стойности на цените на мандатите.

$$(5) \quad \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j: x_{ij} > 0} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \rightarrow \min,$$

Тук възникват затруднения с линеаризацията на втората част на целевата функция. Затова избираме друга, по-проста целева функция, която отново реализира идеята на модела.

$$(6) \quad F_3(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j} \frac{x_{ij} + 1}{v_{ij}} \rightarrow \min.$$

Намереното оптимално решение  $X_3$  е дадено в следната таблица:

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:  
3@ 2 4 4 3 2 3 2 2 1 3 3 4 2 2 3 3 4 1 2 1 3 2 4 3 3 3 4 1 3 1 4  
6@ 2 2 4 2 1 2 2 2 0 2 2 2 2 2 2 3 2 0 1 0 2 1 3 2 2 3 2 0 1 1 1  
8@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 4 3 2 0 1 0 0 0 0  
12@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 2 0 1 0 1 0 0  
14@ 0 2 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 2 0 1 0 2 0 1 0 1 1 1 1 2 0 1 1 0  
17@ 2 2 1 0 1 0 0 2 4 0 0 0 2 0 1 0 1 4 1 3 1 1 0 0 0 0 0 3 2 3 0  
19@ 2 1 2 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 2 2 0 0 0 0 0 1 1 2 1 1 1 0 0 0 0  
със стойност на целевата функция  $F_3(X_3) = 7.3538 \times 10^{-5}$ . Тази стойност се достига за (19@, 06:)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{76}}{v_{76}} = \frac{1}{6771} = 14.7689 \times 10^{-5}$$

и (3@, 30:)

$$\min_{i,j} \frac{x_{ij} + 1}{v_{ij}} = \frac{x_{1\ 30} + 1}{v_{1\ 30}} = \frac{2}{26972} = 7.4151 \times 10^{-5}.$$

### Модел 4.

Да се опитае да решим задачата за монотонност едновременно по партии и по райони. Това означава, че когато една партия е получила повече гласове в един район в сравнение с друг, тя получава и не по-малко мандати в първия район в сравнение с втория. Аналогично, когато една партия е получила повече гласове от

друга партия в даден район, тя получава не по-малко мандати в този район. Т.е., ако за  $i$ -тата партия в  $j$ -тия и  $k$ -тия райони е в сила  $v_{ij} > v_{ik}$ , тогава е изпълнено  $x_{ij} \geq x_{ik}$ . И ако в  $j$ -тия район за  $i$ -тата и  $k$ -тата партии е изпълнено  $v_{ij} > v_{kj}$ , то сила е и  $x_{ij} \geq x_{kj}$ . Това свойство ще наричаме монотонност, а нарушаването му – немонотонност.

$$(7) \quad \begin{aligned} \mu_{ijk} &= (x_{ij} - x_{ik}) \operatorname{sign}(v_{ij} - v_{ik}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, j; \\ \nu_{ijk} &= (x_{ij} - x_{kj}) \operatorname{sign}(v_{ij} - v_{kj}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, i. \end{aligned}$$

За съжаление областта, определена от транспортните равенства (1) и неравенствата (7), е празна. За да елиминираме малки разлики в гласовете, модифицираме модела, като разликите в гласовете делим целочислено на 1000 (т.е. ако разликата в гласовете на две партии в даден район е по-малко от 1000, считаме, че тези две партии са получили равен брой гласове). Но и в този случай допустимата област на задачата е празна.

Да образуваме релаксирана задача по следния начин:

$$F'_4(X) = z \rightarrow \min$$

при условия (1) и

$$(8) \quad \begin{aligned} \mu_{ijk} + z &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, j; \\ \nu_{ijk} + z &\geq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, i. \end{aligned}$$

Тази задача има решение с оптимална стойност  $z = 1$ . Това означава, че ако  $v_{ij} > v_{ik}$ , то  $x_{ij} - x_{ik} \geq -1$ . Решението  $X'_4$  е:

```

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:
3@ 3 7 6 4 2 4 2 2 0 2 1 2 4 1 3 3 3 0 2 1 2 1 6 3 3 3 6 1 3 1 1
6@ 3 3 5 1 1 1 1 2 1 1 0 1 2 1 2 4 4 0 1 1 1 1 3 3 4 0 2 0 2 1 1
8@ 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1
12@ 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1
14@ 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 2 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0
17@ 1 0 0 1 1 0 0 1 4 1 1 1 1 1 1 1 1 0 5 1 1 1 1 1 1 1 1 0 3 1 1 1
19@ 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0

```

Следващата естествена стъпка в задачата за монотонност е да минимизираме броя на немонотонностите. Немонотонност в район  $j$  наричаме двойка партии  $(i_1, i_2)$ , за които  $v_{i_1j} > v_{i_2j}$  и  $x_{i_1j} < x_{i_2j}$ . Аналогично се дефинира и немонотонност в партия.

$$(9) \quad \begin{aligned} \mu_{ijk} + M y_{ijk} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, j - 1; \\ \nu_{ijk} + M z_{ijk} &\geq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, i - 1, \end{aligned}$$

където  $y_{ijk}, z_{ijk} \in \{0, 1\}$  и  $M$  е положителна константа. Когато двоична променлива  $y_{ijk}$  или  $z_{ijk}$  има стойност 0, тогава удовлетворяването на съответното неравенство показва монотонност, а при стойност 1 – немонотонност. Целевата функция е броят

на немонотонностите:

$$(10) \quad F_4''(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{j-1} y_{ijk} + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{i-1} z_{ijk} \rightarrow \min$$

Получено е решение  $X_4''$  при  $M = 1$  със стойност на целевата функция 24:

```

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:
3@ 3 4 3 3 2 3 2 3 0 3 2 3 3 2 3 3 3 0 3 2 3 2 4 3 3 3 4 2 3 2 3
6@ 2 2 4 2 1 2 2 2 0 2 2 2 2 2 2 2 2 0 2 0 2 1 2 2 2 2 2 0 2 1 2
8@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 3 2 2 1 1 0 0 0 0
12@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 2 0 1 0 1 0 0
14@ 0 2 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 2 1 1 0 1 1 0
17@ 2 2 2 0 1 0 0 1 5 0 0 0 1 0 1 1 2 5 1 2 1 1 0 0 0 0 1 2 1 2 0
19@ 1 1 2 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 2 2 1 1 1 0 0 0 0 0

```

Решението на задачата при  $M = 1$  с непрекъснати променливи  $y_{ijk}, z_{ijk} \in [0, 1]$  е целочислено и същата стойност 24 на целевата функция. Интересно е да се отбележи, че софтуерът GLPK дава в този случай целочислено решение, което е различно от  $X_4''$ .

#### Модел 5.

Идеята на този модел е да минимизираме отклонението от средното за всеки район и за всяка партия. Например ако една партия е получила  $\frac{1}{k}$  част от гласовете в даден район, то тази партия би трябвало да получи приблизително  $\frac{1}{k}$  част от определените мандати за този район, т.е.  $\frac{v_{ij}}{w_j} \approx \frac{x_{ij}}{m_j}$ , където  $w_j$  е сумата от гласовете на участващите в разпределението партии в този район.

$$w_j = \sum_{i=1}^p v_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Аналогично се реализира тази идея и за разпределението на мандатите на една партия по райони – искаме  $\frac{v_{ij}}{v_i} \approx \frac{x_{ij}}{n_i}$ , където  $v_i$  е сумата от гласовете на партия  $i$  във всички райони.

$$v_i = \sum_{j=1}^r v_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Прецизирането на понятието близост ни води към използване на класическа  $l_p$  норма. Поради използване на означението  $p$  за брой партии, ще заменим  $p$  с  $s$ :

$$(11) \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right|^s + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right|^s \rightarrow \min$$

Най-напред да формулираме задачата с равномерна ( $l_\infty$ ) норма:

$$(12) \quad F_5(X) = \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right| + \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right| \rightarrow \min$$

Решението  $X_5$  е дадено в таблицата:

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:  
3@ 2 6 6 2 2 3 1 2 1 3 2 3 2 2 5 2 5 1 2 1 3 1 5 2 6 3 3 1 2 1 2  
6@ 2 2 3 2 1 1 1 2 0 1 1 1 3 1 1 4 2 1 1 1 2 1 2 4 1 3 3 1 2 2 1  
8@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 3 2 2 1 1 0 0 0 0  
12@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0  
14@ 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1  
17@ 3 1 1 1 1 1 0 2 4 0 1 1 2 0 0 0 1 3 1 2 1 1 0 0 0 0 1 2 2 2 0  
19@ 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1  
със стойност на целевата функция

$$F_5(X_5) = 0.16124 + 0.03775 = 0.19899,$$

което се достига при (12@, 13:) и (6@, 28:). За решението на ЦИК получаваме

$$F_5(X_0) = 0.135089 + 0.359636 = 0.494726$$

при (8@, 23:) и (17@, 20:).

### Модел 6.

За да получим лесно решими задачи с  $l_s$  норма за  $1 \leq s < \infty$ , използваме една подходяща линеаризация на тези задачи.

За всяка двойка  $(i, j), i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, r$  полагаме:

$$x_{ij} = x_{ij1} + 2x_{ij2} + \dots + qx_{ijq} = \sum_{k=1}^q kx_{ijk},$$

$$\left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{k}{n_i} \right|^s = f_{ijk}^{(1)}, \quad \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{k}{m_j} \right|^s = f_{ijk}^{(2)}, \quad k = 0, 1, \dots, q.$$

Целевата функция е:

$$(13) \quad F(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^q \left( f_{ijk}^{(1)} + f_{ijk}^{(2)} \right) x_{ijk}.$$

Търсим  $\min F(X)$  при ограничения (1), които се преобразуват в (14):

$$(14) \quad \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^q kx_{ijk} = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q kx_{ijk} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

$$(15) \quad \sum_{k=0}^q x_{ijk} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \text{за всяко } i, j, k.$$

Размерите на задачата са: (за  $p = 7, r = 31, q = 6$ )

- брой неизвестни:  $pr(q+1) = 1519$ ;
- брой събираеми в целевата функция:  $pr(q+1) = 1519$ ;
- брой ограничения:  $p+r = 38$  от първия вид (14) и  $pr = 217$  от втория вид (15).

Най-напред ще използваме  $l_1$  норма.

$$(16) \quad F_6(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right| + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right| \rightarrow \min$$

Прилагаме описаната техника за този модел и решаваме получената задача. Оптималната стойност на целевата функция е  $F_6(X_6) = 12.2766$  за следното решение:

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:  
3@ 3 4 4 3 2 3 1 3 1 2 2 3 3 2 4 3 4 1 2 1 3 1 4 3 4 3 4 1 3 2 3  
6@ 2 3 4 2 1 2 1 2 0 2 1 1 2 1 2 3 2 1 2 1 1 1 3 2 3 2 2 1 1 1 1  
8@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 3 2 2 1 1 0 0 0 0  
12@ 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0  
14@ 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1  
17@ 2 2 2 0 1 0 0 1 4 0 1 1 1 0 1 1 1 3 1 2 1 1 0 1 0 0 1 2 2 2 0  
19@ 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0

### Модел 7.

Най-използваният модел за отклонение от средното е минимизация с  $l_2$  норма (най-малки квадрати).

$$(17) \quad F_7(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \left( \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \left( \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right)^2 \rightarrow \min$$

След линеаризиране на задачата по описания по-горе начин и решаването на получената линейна целочислена задача, намираме стойност на целевата функция  $F_7(X_7) = 0.702059$  за следното разпределение:

01:02:03:04:05:06:07:08:09:10:11:12:13:14:15:16:17:18:19:20:21:22:23:24:25:26:27:28:29:30:31:  
3@ 3 4 4 3 2 3 1 3 1 2 2 3 3 2 4 3 4 1 2 1 3 1 4 3 4 3 4 1 3 2 3  
6@ 2 2 4 2 1 2 1 2 0 2 1 2 2 1 2 3 2 1 2 1 1 1 3 2 3 2 2 1 1 1 1  
8@ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 3 2 2 1 1 0 0 0 0  
12@ 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0  
14@ 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1  
17@ 2 3 2 0 1 0 0 1 4 0 1 0 1 0 1 1 1 3 1 2 1 1 0 1 0 0 1 2 2 2 0  
19@ 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0

Това решение е единствено! За да докажем това твърдение, към ограниченията на задачата добавяме още едно:

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk} \leq pr - 1,$$

където  $\{x_{ijk}^{(0)}\}$  е намереното решение на линеаризираната задача (13)-(14)-(15). Тъй като очевидно

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^q x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r 1 = pr,$$

то решението на новата задача ще бъде друго. За стойност на целевата функция за новото решение получаваме

$$0.703095 > F_7(X_7) = 0.702059.$$

Защо полученото от този модел разпределение е по-добро?

Примери по райони:

| Район → | 23:     | 24:     |
|---------|---------|---------|
| 3@      | 62206 4 | 47318 3 |
| 6@      | 43311 3 | 36011 2 |
| 8@      | 36536 3 | 29869 2 |

| Район → | 09:     |
|---------|---------|
| 3@      | 17746 1 |
| 17@     | 63570 4 |

Примери по партии:

| Партия | 6:    |   | 17:   |   | 23:   |   |
|--------|-------|---|-------|---|-------|---|
| 3@     | 38996 | 3 | 54575 | 4 | 62206 | 4 |
| 6@     | 19679 | 2 | 33498 | 2 | 43311 | 3 |

### Сравнителни резултати

Разгледаните в тази статия методи имат преди всичко за цел пресмятането на оптималните стойности на съответните целеви функции, а не създаване на “добър” метод за разпределяне на мандатите на партиите по райони. Поради тази причина не сме разглеждали въпроса за избор на решение в случаите, когато то не е единствено. Считаме, че когато се предлага метод за разпределяне на мандатите на партиите по райони, то той трябва да се сравни с най-добрите методи по посочените критерии. В следващата таблица сравняваме по тези критерии получените в тази статия решения, решенията по метода, използван в ЦИК, а също така и метода, предложен в дискусиите след изборите от И. Божинов [3].

|         | $F_1$<br>$\times 10^{-2}$ | $F_2$<br>$\times 10^{-4}$ | $F_3$<br>$\times 10^{-4}$ | $F_4$     | $F_5$         | $F_6$<br>$\times 10$ | $F_7$        |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------|---------------|----------------------|--------------|
| $X_1$   | <b>0.908</b>              | 8.80                      | 8.64                      | 246       | 1.7634        | 4.987                | 18.39        |
| $X_2$   | 1.151                     | <b>1.45</b>               | 1.29                      | 352       | 0.7296        | 2.627                | 4.173        |
| $X_3$   | 1.216                     | 1.48                      | <b>0.74</b>               | 153       | 0.4409        | 1.691                | 1.585        |
| $X'_4$  | 2.421                     | 3.83                      | 3.70                      | 378       | 0.5982        | 2.029                | 2.197        |
| $X''_4$ | 1.128                     | 1.79                      | 1.25                      | <b>24</b> | 0.5793        | 1.511                | 1.359        |
| $X_5$   | 1.520                     | 8.24                      | 7.68                      | 214       | <b>0.1990</b> | 1.617                | 1.183        |
| $X_6$   | 1.426                     | 3.28                      | 2.49                      | 61        | 0.2035        | <b>1.228</b>         | 0.705        |
| $X_7$   | 1.400                     | 2.60                      | 1.82                      | 61        | 0.2035        | 1.231                | <b>0.702</b> |
| $X_0$   | 1.166                     | 1.45                      | 1.12                      | 148       | 0.4947        | 1.836                | 2.043        |
| IB      | 1.435                     | 5.32                      | 4.53                      | 178       | 0.4458        | 1.459                | 1.200        |

От разгледаните методи най-добър по съвкупността от показатели е Метод 7, а след него – Метод 6. Методът на ЦИК реализира екстремума на критерий 2 и дава много добри резултати по критерии 1 и 3. За съжаление той не дава добри резултати по останалите критерии.

Също така отделните методи трябва да се сравнят и по данните от предишни парламентарни избори, разгледани като примери на реални данни. Необходимо е и пресмятане на средните отклонения на даден метод по всеки от критериите, като усредняването се взема по множество от допустими начални данни.

Пресмятанията са направени с пакета GLPK [6], операционна система BSD на компютър AMD64/2GHz. Модел 4: (9)-(10) за  $M = 1$  беше решен и с пакета CPLEX [7]. И двата пакета не можах да решат същия модел за  $M = 10$ . Въпреки, че CPLEX решава квадратични задачи с линейни ограничения, опитът за директно решаване на Модел 7: (17) не доведе до успех.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] ЗАКОН за избиране на народни представители,  
<http://ou.government.bg/rc/PARLAMENTARNI-2005/ZINP.htm> (30.12.2005)

- [2] Изборни резултати - парламентарни избори - 25.06.2005г.  
<http://www.izbori-2005.org/results/index.html> (30.12.2005)
- [3] Илия Божинов, Методът Д'Онт и изборните резултати. Какво е сбъркано, кой е виновен и как може да се оправи работата.  
<http://www.zabulgaria.com/cgi-bin/e-cms/vis/vis.pl?s=001&p=0264&n=000012&g=>  
 (27.12.2005)
- [4] Методика за определяне на броя на мандатите в избирателните райони и на резултатите от гласуването, ЦИК – РЕШЕНИЕ НОМЕР 14, 14.04.2005.  
<http://www.is-bg.net/cik2005/news.php?id=30&sub=3> (30.12.2005)
- [5] D'Ont worry, be happy!, Вестник НОВИНАР, Брой 301, (1543), 29.06.2005  
<http://www.novinar.org/main.php?act=news&act1=det&sql=MTYONdsxMA==&mater=MTYONds20A==> (30.12.2005)
- [6] GLPK (GNU Linear Programming Kit)  
<http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html> (30.12.2005)
- [7] ILOG CPLEX: High-performance software for mathematical programming,  
<http://www.ilog.com/products/cplex/> (22.01.2006)

Камен Ганчев Иванов  
 Институт по математика и информатика  
 Българска академия на науките  
 ул. "Акад. Г. Бончев", бл. 8  
 1113 София  
 e-mail: kamen@math.bas.bg

Никола Иванов Янев  
 Факултет по математика и информатика  
 Софийски университет "Св. Кл. Охридски"  
 бул. "Джеймс Баучър" 5  
 1164 София  
 e-mail: nyanev@irisa.fr

Николай Киров Киров  
 Департамент Информатика  
 Нов български университет  
 1618 София,  
 ул. "Монтевидео" 21  
 e-mail: nkirov@nbu.bg  
 Институт по математика  
 и информатика  
 Българска академия на науките  
 ул. "Акад. Г. Бончев", бл. 8  
 1113 София  
 e-mail: nkirov@math.bas.bg

## OPTIMAL DISTRIBUTION OF THE PARTIES MANDATES FOR 40. PARLIAMENT AMONG ELECTORAL DISTRICTS

**Kamen G. Ivanov, Nikolay K. Kirov, Nicola I. Yanev**

In the 2005 Parliamentary elections 7 parties passed the 4% threshold and took part in the distribution of 240 mandates. According to the election law, mandates were allocated among these parties applying D'Hondt method. After that the mandates of the parties should be distributed among electoral districts. This was done in accordance to a method defined by the Central Election Commission (CEC) and provoked reasonably discontent among the people because the proportionality principle between received votes and distributed mandates in a given district was violated seriously.

In this article we lay out and solve some optimization models for solving this problem. It is shown that the CEC method gives an optimal solution (one of many) in some models. Also some better solutions are obtained and the solution in a model of least square deviation from proportionality is unique.