

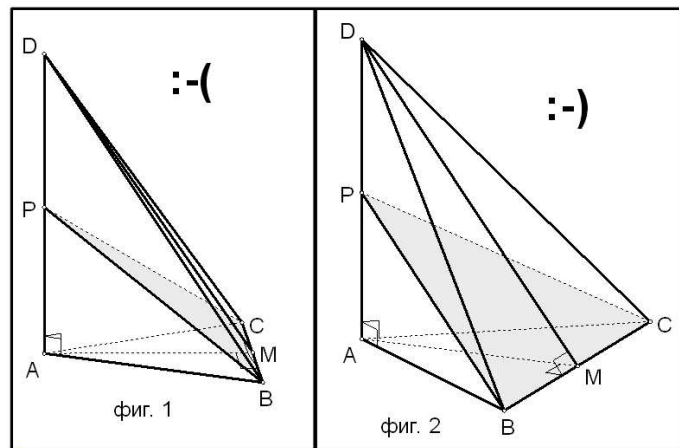
КОМПЮТЪРЪТ В ЧАС ПО МАТЕМАТИКА

Димитър А. Белев, Василка П. Игнатова-Белева

Възможни приложения на компютърни програми, определяни като **“Dynamic Geometry”**, **“Interactive Geometry”**, **“Live Geometry”** в часа по математика.

1. Компютърът в обучението по математика. До скоро компютърът беше само предмет за изучаване, но все по-често започва да помага в обучението по различни предмети. Най-често това са специални предмети свързани с техническото чертане или езикови курсове. Къде е ролята му в часа по математика?

Целта на тази статия е да споделя опита си в прилагането на програми* определяни като **„Dynamic Geometry”**, **“Interactive Geometry”**, **“Live Geometry”** в часа по математика. Определенията подсказват, че чертежа няма да е вече “статично закован” на дъската (листа), а ще можем начертаните геометрични обекти и графики на функции да ги изследваме, променяйки един или повече параметъра.



2. Изготвяне на чертежи за хартиени или електронни носители. Чертането в тези програми е близко до чертането с линейка и пергел. Нещо повече, можем да преместим някои елементи, така че всичко в чертежа да бъде “максимално” видимо, тоест при сложни чертежи не ни се налага да чертаем няколко пъти

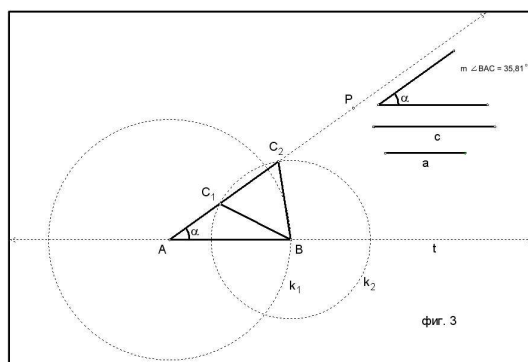
*The Geometer’s Sketchpad, Euklides, C.a.R., Cindarella...

докато постигнем “най-добро” разположение на елементите в тях. Така “лошият вид” на пирамидата от фиг. 1 е “оправен” с преместването на т. B и C (вж. фиг. 2).

Чертежът можем да разпечатам, да покажем на екрана на монитора или с проектор, или да публикуваме на страниците на интернет сайт.

3. За решаване „в момента” на различни задачи. Дори чертежа да е добър това, което ученикът много често не вижда зад него, е пътя на неговото изграждане. Тогава е добре да чертаем пред очите на учениците.

Задача 1. Да се построи $\triangle ABC$, по дадени $\angle BAC = \alpha$, $AB = c$ и $BC = a$.

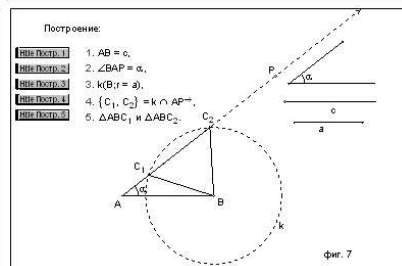
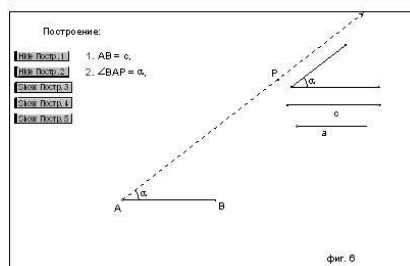
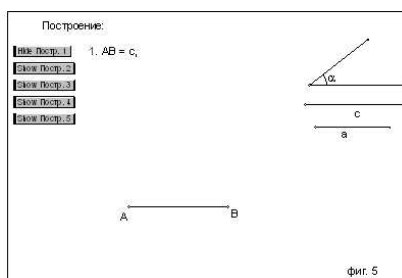
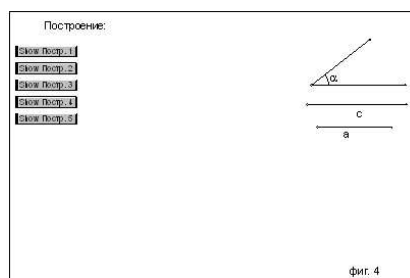


Докато чертаем (фиг. 3), обясняваме на учениците задачата, така както го правим и чертаейки на дъската. После виждаме какво ще се получи при изменението на отсечките a , c и ъгъл α .

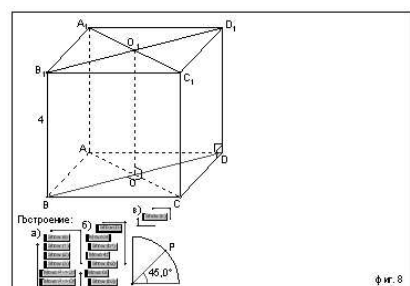
Чертането “на живо” обаче се “плаща” с време и претрупани чертежи. Ако искаме да “изчистим” чертежа от “излишните” елементи, да намалим времето за изчертаване за да решим повече задачи и едновременно с това да запазим предимствата на „живото” чертане, то трябва да се приготвим за ...

4. Изготвяне на “статични” презентации. Ще използваме същия пример от **Задача 1**. Ще скрием “излишните” елементи, а нужните ни построения ще накарваме да се появяват (или скриват) с натискането на един бутон. В допълнение заедно с геометричното построение ще показваме и описанието му. Извършвайки построенията (фиг. 4–7), ние даваме указания, а едновременно с това можем и да наблюдаваме учениците.

Ако правим презентация на урок, то разполагаме чертежите си в повече от един “лист” и “скачаме” от лист в лист чрез бутони за връзка. Тези презентации могат да бъдат използвани както от преподавателя, така и за самообучение. Ако чертежите са малко, ги правим в една страница и ги показваме (скриваме) заедно с бутоните за управление в тях.

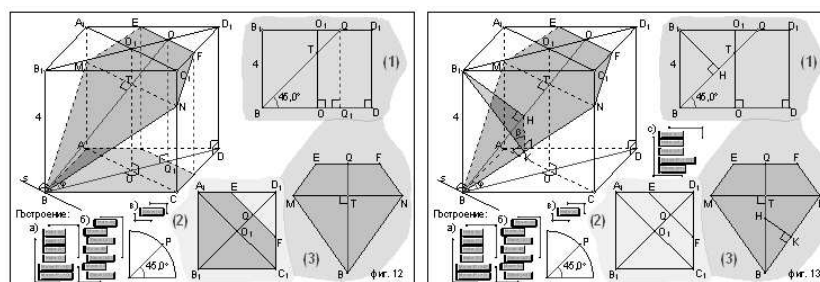


- Задача 2.** Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ със страна $a = 4$ и ъгъл $\varphi \in [0; 90^\circ]$.
- а)** Да се построи сечението на равнина α с куба, ако α минава през B , $\alpha \parallel AC$ и $\angle(\alpha; (ABCD)) = \varphi$. Определете вида на сечението в зависимост от стойността на φ .
- б)** Да се намери лицето на сечението от **а)** за $\varphi = 30^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.
- в)** Да се построи ъгъл $\beta = \angle(\alpha; (BCC_1 B_1))$. Намерете ъгъл β , ако $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

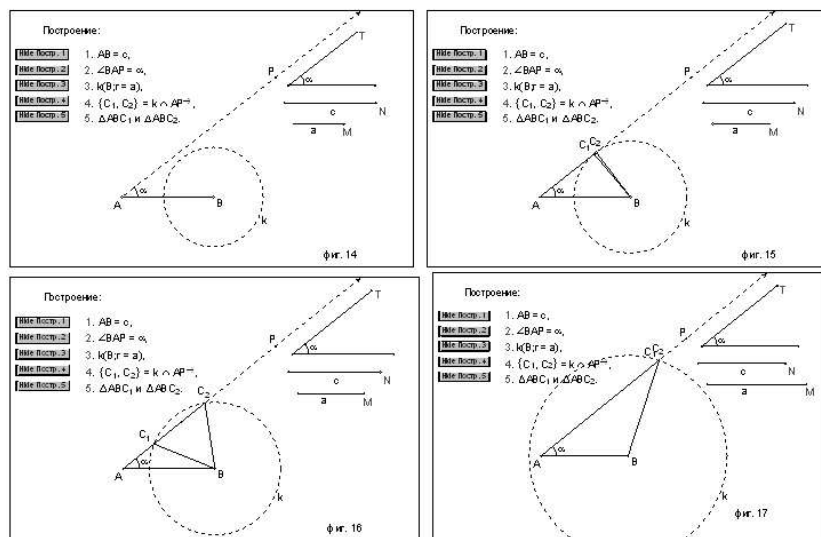


група **а**). Освен стереометричните построения показваме и състоянието на основни равнини, в които работим. Зоните **(1)** и **(2)** (на фиг. 10 горе и долу вдясно и на фиг. 11 – аналогичните), показват диагонално сечение и основа на куба, а зона **(3)** (на фиг. 11 долу вдясно) показва действителния вид на сечението. Оцветяването отделя визуално зоните и учениците се концентрират **само** върху нужната зона.

Построенията от точка **а**) могат да останат или да бъдат скрити преди да извършим построенията в точка **б**). Сега те остават. За да намерим лицето на сечението с бутоните от група **б**) показваме (фиг. 12) проекцията на сечението за съответната стойност на ъгъл φ . Едновременно с това се променят и чертежите в зони **(1)** и **(2)**. Оцветяването отново отделя визуално елементите на вече доста сложния чертеж.



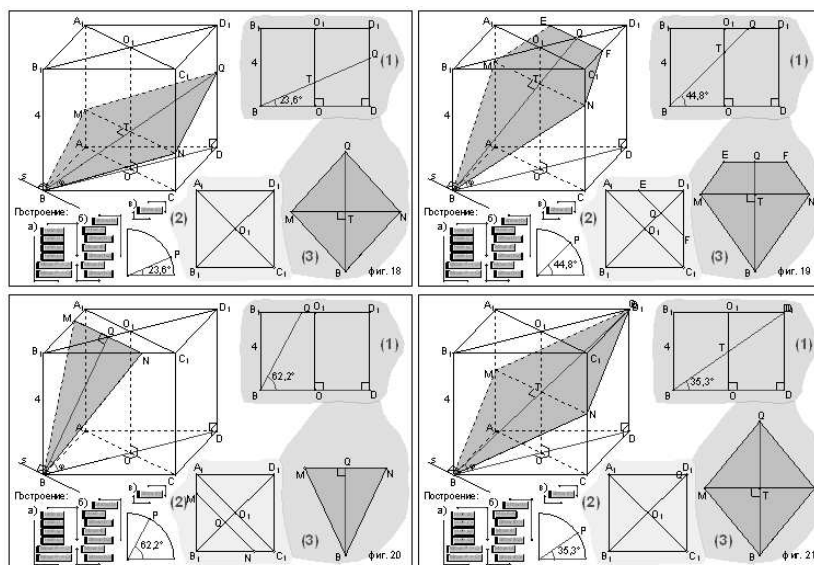
Обратно, за построенията от точка **в**), скриваме ненужното от точка **б**). Натискането на бутона от група **в**) води до появата на управляващи бутони, с които показваме (фиг. 13) построенията на точка **в**). Зони **(1)**, **(2)** и **(3)** съответстват на стереометричния чертеж.



5. Изготвяне на “живи” презентации. Досега презентациите не се различаваха съществено от тези направени например с прайпроектор, на който показваме

предварително начертани слайдове. Това, което можем в повече да покажем с тези програми, е **движение**! Можем да изменяме параметри, да движим обекти и да наблюдаваме промените на чертежа.

В примера от **Задача 1** след построението правим изследване като “хванем” с мишката точка M (фиг. 14–17) и я преместим в ляво или в дясно (намаляваме или увеличаваме дължината на отсечката a). Ако искаме да покажем един конкретен случай (например, когато окръжността k допира лъча AP , можем да създадем бутон за придвижване, след натискането, на който движението спира в нужната ни точка.

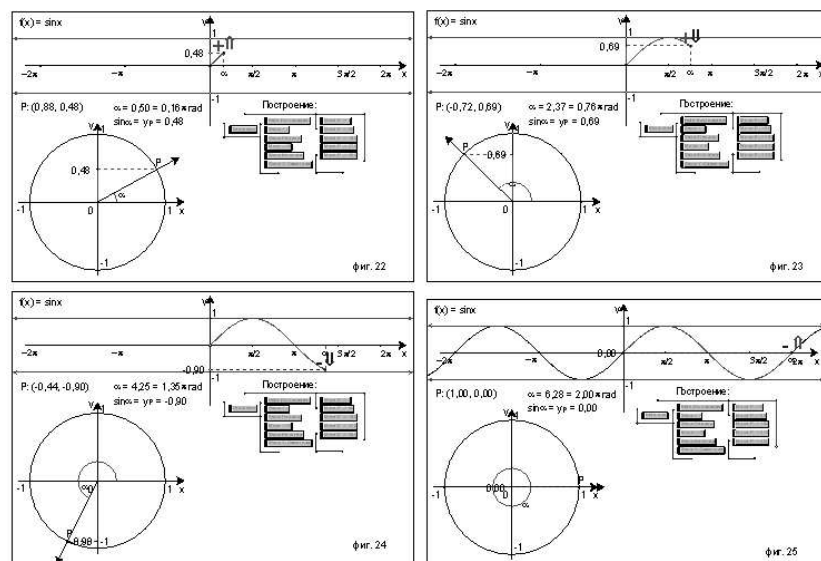


В **Задача 2** показваме вида на сечението (фиг. 18–20) като преместваме точка P . Така задаваме ъгъл $\varphi \in [0; 90^\circ]$. На фиг. 18–20 виждаме три кадъра от изменението на сечението. За да обърнем внимание на точките, в които става промяната на вида на сечението, натискаме някой от бутоните за движение в група **а)** и сечението се позиционира в нужната точка. На фиг. 21 сечението се превръща от ромб в петогълник, когато равнината α мине през върха D_1 . Аналогично със съответните бутони в точка **б)** караме равнината на сечението да сключва ъгли 30° , 45° , 60° с равнината на основата.

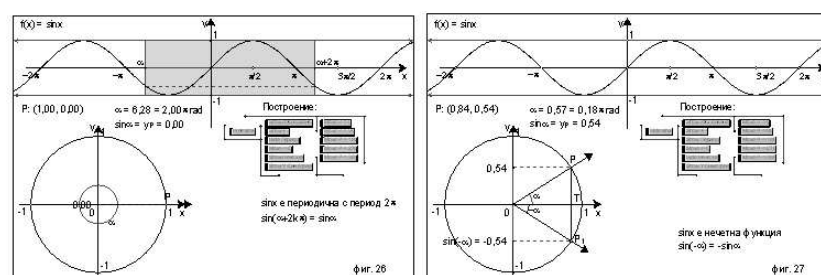
6. Създаване на изследователски инструменти. В 10-ти клас дефинираме тригонометричните функции, чертаем графиките им и извеждаме техни основни свойства. Това можем да направим и така.

Плавно въртим точка P (фиг. 22–25) върху единичната окръжност. Учениците виждат как се изменя функцията $f(x) = \sin x$ в един период от 0 до 2π . Начертаваме синусоидата (фиг. 25) и показваме, че функцията е периодична (фиг. 26) като “плъзгаме” ъгъла по абсцисната ос и видим, че тя има едни и същи стойности за α и за $\alpha + 2\pi$.

После бихме могли да покажем, че функцията $f(x) = \sin x$ е нечетна (фиг. 27).



Подобни инструменти можем да направим за всички изучавани функции, да покажем геометричния смисъл на производна на функция в точка, да сравним графиката на $f(x)$ с графиките на функциите $f(x) + a$, $a \cdot f(x)$, $f(x + a)$, $f(a \cdot x)$...



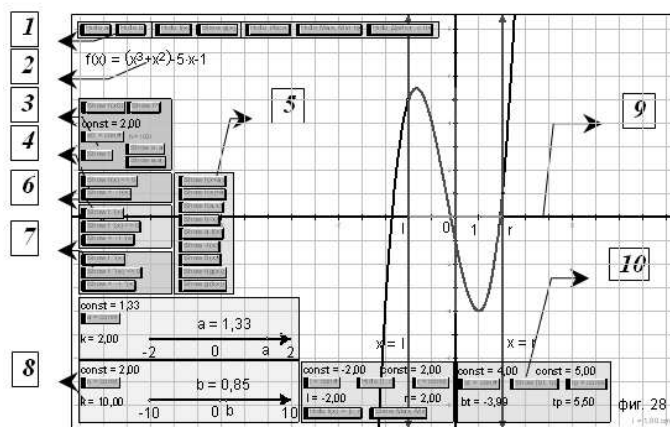
Освен тях обаче можем да направим и такива, които решават по-широк кръг от задачи.

На фиг. 28 виждаме инструмент^{*}, който решава много от задачите свързани с изследване на функции.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията:

- $f(x)$, ако $x \in [-2; 2]$;
- $g(x) = a^{f(x)}$ за $a = 4/3$ и $a = 2/3$, ако $x \in [-2; 2]$;

^{*} **1** – показва на палетите с инструменти, **2** – функция $f(x)$ ($g(x)$ е скрита), **3** – допирателни и асимптоти, **4** – положителни и отрицателни стойности на $f(x)$, **5** – действия с графиката на $f(x)$, **6** – първа производна на $f(x)$, **7** – втора производна на $f(x)$, **8** – параметри a и b , **9** – координатна система, **10** – ограничителни линии.

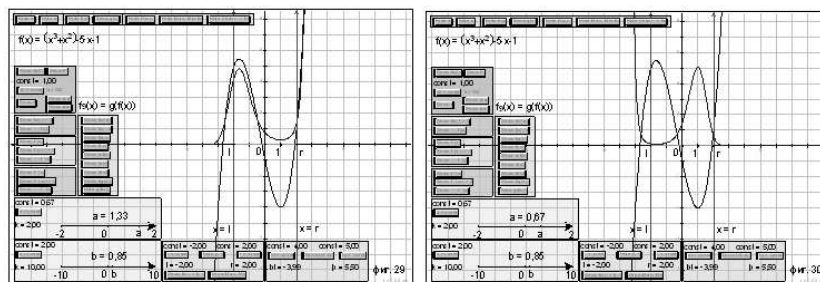


а) $t(x) = \sin^3 x + \sin^2 x - 5 \cdot \sin x - 1$.

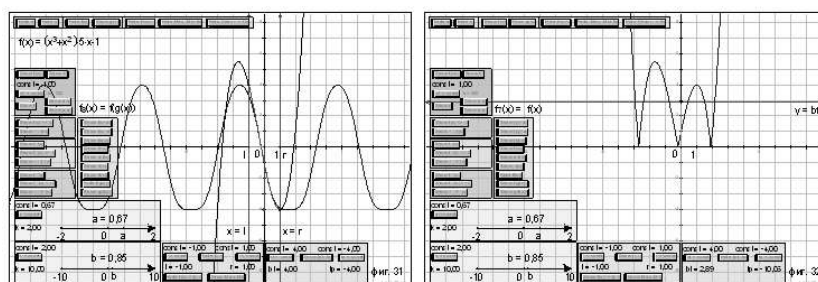
з) В зависимост от параметъра m , намерете броя на корените на $|f(x)| = m$.

В полето [2] (фиг. 28) записваме функцията $f(x)$ (в инструмента “лаборатория” разполагаме с две функции $f(x)$ – главна и $g(x)$ – помощна). Графиката ѝ се показва на екрана. С бутоните от палети [10] задаваме нужния интервал и показваме графиката на $f(x)$ в този интервал (с по-светъл цвят) и вертикалните ограничителни линии (границы на интервала). Екстремалните стойности на $f(x)$ стават очевидни. Ако с мишката местим интервала (в по-светло), учениците виждат как се изменят тези стойности.

За точка б) в полето [2] на функцията $g(x)$ записваме функцията $y = a^x$ и я скриваме. В палет [5] натискаме бутона $g(f(x))$ и получаваме графиката на $g(x) = a^{f(x)}$. Учениците се убеждават, че когато $y = a^x$ е растяща (намаляваща), тогава $f(x)$ и $g(x)$ достигат еднотипни (противоположни) екстремуми за една и съща стойност на x (фиг. 29–30). Ако изменяме параметъра a [8], учениците виждат изменението на $g(x) = a^{f(x)}$.



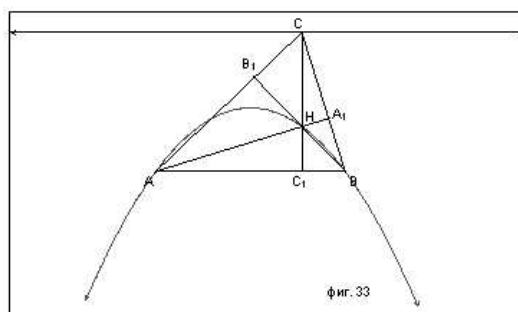
За точка в) в полето [2] на функцията $g(x)$ записваме функцията $y = \sin x$. В палет [5] натискаме бутона $f(g(x))$ и получаваме графиката на $t(x)$. Така показваме (фиг. 31) равенството на екстремалните стойности на $f(x)$ за $x \in [-1; 1]$ и на $t(x)$. Ако променим интервала, в който разглеждаме графиката на $f(x)$ учениците ще се убедят в задължителността на условието $x \in [-1; 1]$.



Показваме решението (фиг. 32) на точка 2) като в палет [5] натиснем бутона $|f(x)|$, скрием $f(x)$ и за параметъра t използваме една от хоризонталните прави (палети [10]).

Решаването с помощта на “лабораторията” предполага, че учениците са вече “на ти” с изследването на функции. Така се съсредоточаваме само върху съществените моменти от решенията на тези задачи.

7. Формулиране и проверка на хипотези. В горните примери ученикът повече или по-малко има пасивна роля. С помощта на тези програми можем да го поставим в ролята на откривател.



Това е безкрайно поле от възможности (На фиг. 33 – Върха C на $\triangle ABC$ се движи по права успоредна на AB . Какво описва ортоцентърът му H ? Май, парабола...). И не само за задаване на педагогически проблеми, чието решаване да помогне на ученика да усвои съответния материал. Това е безкрайно поле от възможности за истинско творчество не само за ученика, но и за учителя. Но...

8. Проблеми и изводи. ... неусетно стигнахме до проблемите. Време и пари. Тук каквото и да кажем ще е до булетта познато. Програмите струват пари, закупуването на повече лицензи – още пари, компютри, проектори... Една презентация от тип **Задача 2** се прави за един до три дни, а “лабораторията” – за месец, два...

Съвременният ученик трудно можеш да учудиш с шарени картинки. Въпреки това учениците се радват да видят такива чертежи, но ... не ги чертаят, а когато имат възможност ги копират или снимат буквално – с фотоапарат. Калкулаторите успешно отучиха ученика да смята, а сега...

Безспорно програмите от разгледания вид могат да бъдат полезни, въпреки горчивия пример с калкулаторите. Може би всичко зависи от “дозата”. Ако се комбинират внимателно “стария” (черна дъска и тебешир) начин на преподаване и “новите” методи (компютър, мултимедия, интернет), резултатът по наше мнение би бил най-добър.

Димитър Андонов Белев
Василка Петрова Игнатова-Белева
ж.к. “Овча Купел 2” бл. 23, вх. В
1632 София
e-mail: dbelev@gbg.bg

COMPUTERS IN MATHEMATICS LESSON

Dimitar A. Belev, Vasilka P. Ignatova-Beleva

The paper deals with possible applications of computer programs, determinate as **“Dynamic Geometry”**, **“Interactive Geometry”**, **“Live Geometry”** in the mathematics lessons.