

ГЪСТОТА НА РЕДИЦАТА $\sin(n^2)$ В $[-1, 1]$

Велика Драгиева, Симеон Стефанов, Владимир Тодоров

Получено е едно геометрично доказателство на факта, че редицата $\sin(n^2)$ е гъста в интервала $[-1, 1]$.

Тук ще приведем едно геометрично доказателство на нетривиалния факт, че редицата $\sin(n^2)$ е гъста в интервала $[-1, 1]$ (вж. следствие 2 от основната теорема). То използва някои елементарни геометрични и топологични съображения и е подходящо за семинарни и кръжочни занятия по анализ, топология или основи на ергодичната теория. Доказателството е интересно с това, че в него се пресичат разнородни математически идеи, а така също че е сравнително елементарно и лесно може да бъде обобщено за доста по-сложни редици. Материалът е достъпен за студенти първокурсници.

По-долу предполагаме, че са известни някои елементарни топологични понятия, като например: гъстота, пълнота, непрекъснатост, изброима база. Както обикновено, ако $x \in R$, с $\{x\}$ ще бележим дробната част на x .

Следващите две теореми са добре известни и няма да привеждаме доказателствата им тук.

Теорема на Кронекер. *Ако α е ирационално число, то редицата от дробните части $\{n\alpha\}$, $n = 1, 2, \dots$ е гъста в $[0, 1]$.*

Теорема на Бер. *Ако X е пълно метрично пространство и $\{U_i\}$ е изброима фамилия от отворени гъсти подмножества в X , то сечението им $\cap U_i$ е непразно.*

Ако S^1 е единичната окръжност, както обикновено, с $T^2 = S^1 \times S^1$ означаваме двумерния тор. По-нататък, за простота на означенията ще използваме т.н. “циклически координати mod 1” в тора, именно, под точка с циклически координати (x_1, x_2) ще подразбираме точка

$$(\exp(2\pi i x_1), \exp(2\pi i x_2)) \in T^2.$$

Нека α е ирационално число и T^2 е двумерният тор. Да разгледаме изображението $P : T^2 \rightarrow T^2$ дефинирано в циклически координати mod 1 по следния начин

$$P(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha, x_1 + x_2).$$

Ясно е, че това е коректно дефинирано непрекъснато изображение. Освен това то е взаимно-еднозначно и “върху”, следователно е хомеоморфизъм, тъй като T^2 е компактно множество.

Теорема. *За всяко $x \in T^2$ редицата от итерациите $P^n(x)$ е навсякъде гъста в T^2 .*

Доказателство. Първо ще покажем, че съществува $x \in T^2$, такова че редицата $P^n(x)$ е гъста в T^2 . Достатъчно е да докажем следното свойство:

(*) Всяко отворено $U \subset T^2$, за което $P(U) = U$, е гъсто в T^2 .

Наистина, ако това е вярно, ще вземем изброима база $W_i, i = 1, 2, \dots$ на T^2 и ще разгледаме множеството

$$W_0 = \bigcap_i \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} P^n(W_i),$$

което е навсякъде гъсто в T^2 съгласно теоремата на Бер, тъй като е сечение на отворени гъсти множества. Ясно е сега, че всяка точка $x \in W_0$ има гъста траектория, тъй като за всяко i някоя нейна итерация $P^n(x)$ посещава W_i .

Лесно се вижда по индукция, че за итерациите на P имаме

$$(1) \quad P^n(x_1, x_2) = (x_1 + n\alpha, \quad nx_1 + x_2 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha).$$

Сега ще докажем (*). За това е достатъчно да докажем, че за всеки две отворени U, V съществува n , такова че $P^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Това ще следва, ако докажем, че за всяка малка “хоризонтална” отсечка l съществува n , такова че $P^n(l) \cap V \neq \emptyset$. Всъщност, достатъчно е да докажем, че за всяка “малка” хоризонтална отсечка l' с краища $P(a, b), Q(a', b)$ съществува n , такова че $P^n(l) \cap l' \neq \emptyset$. Удобно е вместо тора T^2 да разгледаме квадрата $I^2 = [0, 1]^2$ и да смятаме, че торът се получава от квадрата чрез отъждествяване на срещуположните му страни. (Сега P вече не е непрекъснато изображение върху I^2 , но е еднозначно дефинирано.) Нека отсечката l има краища $A(x_1, x_2)$ и $B(x_1 + \varepsilon, x_2)$. Да разгледаме изображението $P(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha, x_1 + x_2)$ като линейно изображение на равнината в себе си. Ще отбележим следното: отсечката $P^n(l)$ става все по-дълга и по-хоризонтална; наистина, хоризонталната ѝ проекция има дължина ε , а вертикалната – $n\varepsilon$, което лесно се вижда от (1). От теоремата на Кронекер следва, че за произволно голямо n е изпълнено

$$|\{x_1 + \varepsilon/2 + n\alpha\} - (a' - a)/2| < \delta$$

където δ е произволно малко положително число. Сега разглеждайки отново P като изображение на I^2 в себе си, виждаме, че за достатъчно малко δ множеството $P^n(l)$ е обединение от краен брой отсечки, като поне една от тях съединява срещуположните (хоризонтални) страни на I^2 и пресича l' (виж Фиг. 1). Това е отсечката, съдържаща $P^n(x_1 + \varepsilon/2, x_2)$. Оттук следва, че за достатъчно голямо n е изпълнено $P^n(l) \cap l' \neq \emptyset$.

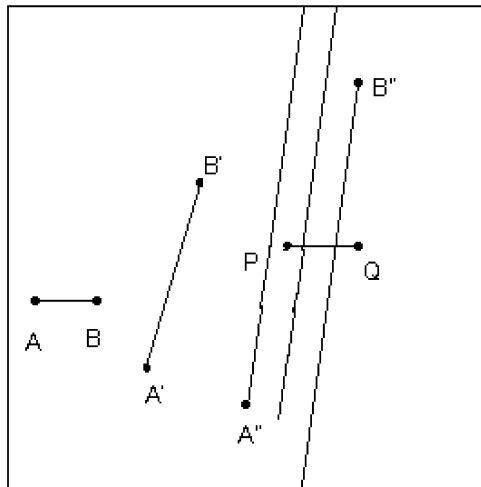
И така, доказахме че всяка точка $x \in W_0$ има гъста траектория.

Да отбележим сега следното: ако (x_1, x_2) има гъста траектория, то и $(x_1, x_2 + \varepsilon)$ също има гъста траектория. Наистина, от дефиницията на P следва, че

$$P(x_1, x_2 + \varepsilon) = (x_1 + \alpha, x_1 + x_2 + \varepsilon),$$

значи $P\tau = \tau P$, където $\tau(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + \varepsilon)$ е трансляция. Оттук лесно следва, че и траекторията на $(x_1, x_2 + \varepsilon)$ е гъста в T^2 , понеже тя е образ при τ на траекторията на (x_1, x_2) .

Сега ще докажем, че **всяка** точка $x \in T^2$ има гъста траектория. Да допуснем противното, тогава в T^2 съществува P -инвариантно собствено затворено множество K . Нека $(x_1, x_2) \notin K$. Тогава от горното свойство следва, че за вертикалната отсечка l над (x_1, x_2) е изпълнено $l \cap K = \emptyset$. Следователно, ако разгледаме проекцията K'



Фиг. 1

на K върху първия множител, ще получим, че в S^1 съществува собствено затворено множество, което е инвариантно относно ротацията на ъгъл α . Но такова множество няма, както следва от теоремата на Кронекер. Полученото противоречие доказва теоремата.

Следствие 1. За всяко ирационално число β редицата от дробните части $\{n^2\beta\}$ е гъста в $[0, 1]$.

Доказателство. Това веднага следва, ако в (1) положим $\alpha = 2\beta$, $x_1 = \beta$, $x_2 = 0$.

Следствие 2. Редицата $\sin(n^2)$ е гъста в $[-1, 1]$.

Доказателство. Лесно се вижда следното: За всяка редица x_n редицата от дробните части $\{x_n\}$ е гъста в $[0, 1]$ точно тогава, когато редицата $\exp(2\pi i x_n)$ е гъста в S^1 . Сега от Следствие 1 получаваме, че $\{n^2(1/2\pi)\}$ е гъста редица в $[0, 1]$, следователно $\exp(in^2)$ е гъста в S^1 редица. Остава да отбележим, че $\exp(in^2) = \cos(n^2) + i \sin(n^2)$.

Забележка. По индукция с аналогично построение може да се докаже и че редицата $\sin(n^k)$ е гъста в $[-1, 1]$ за всяко естествено число k . За $k = 1$ получаваме класическата едномерна теорема на Кронекер, която формулирахме в началото.

Ще завършим с някои исторически бележки. Доказаното тук е частен случай на известната теорема на Вайл за равномерното разпределение [1], където е доказано, че за всяко ирационално α и за всеки полином с цели коефициенти $P(n)$ редицата от дробните части $\{P(n)\alpha\}$ е гъста в $[0, 1]$. Изображението P е известно в ергодичната теория (вж. напр. [2]), където се доказва неговата ергодичност, от което следва нашата основна теорема, но доказателствата използват сложен математически апарат от хармоничния анализ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. WEYL. Über der Gleichverteilung von Zahlen mod 1. *Math. Ann.*, **77** (1916) 313–352.
[2] Я. Г. Синай. Современные проблемы эргодической теории. М., “Физ.-Мат. литература”, 1995.

Велика Драгиева
Лесотехнически университет
бул. Кл. Охридски 10
1756 София, България
e-mail: vildrag2001@yahoo.com

Симеон Стефанов
Университет по архитектура,
строителство и геодезия
бул. Хр. Смирненски 1
1046 София, България
e-mail: sim_stef@yahoo.com

Владимир Тодоров
Университет по архитектура,
строителство и геодезия
бул. Хр. Смирненски 1
1046 София, България
e-mail: vtt@yahoo.com

DENSITY OF THE SEQUENCE $\sin(n^2)$ IN $[-1, 1]$

Velika Dragieva, Simeon Stefanov, Vladimir Todorov

A geometric proof of the fact that the sequence $\sin(n^2)$ is dense $[-1, 1]$ is obtained.