

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2006
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2006
*Proceedings of the Thirty Fifth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 5–8, 2006*

ЕДНА ЗАДАЧА НА ЩАЙНЕР И ЗА ВРЪЗКАТА МЕЖДУ
АНАЛИТИЧНАТА И СИНТЕТИЧНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Живко Ив. Желев

Целта на тази статия е да покаже как аналитичните и синтетичните методи в геометрията се допълват. Като изходен пример е взета една задача на Якоб Щайнер, която е решена по два различни начина. Първото решение принадлежи на самия Щайнер, а второто е на автора. Общото между тези две решения е, че те комбинират в себе си елементи от аналитичната и синтетичната елементарна геометрия.

1. Въведение Развитие на геометрията през 19 век е свързано най-вече с имената на немските математици Фердинанд Мьобиус (1790–1868), Якоб Щайнер (1796–1863), Христиан фон Шгаудт (1798–1867) и Юлиус Плюкер (1801–1868). С техните имена е свързана “ожесточената борба” между синтетичното и аналитичното течение в геометрията.*

Насоката на работа на аналитиците била усъвършенстване метода на координатите. Развитие на синтетичната геометрия предполагало даването на безкоординатно определение на геометричните обекти в проективната геометрия, например, кривите от втори ред. Именно това успял да направи Я. Щайнер.

Я. Щайнер бил син на швейцарски селянин и на младини бил овчар. Той става грамотен едва на 19 години в училището на своя знаменит съотечественик педагога Йохан Песталоци (1746–1827).

Геометрията като учение за формите заема особено важно място в общата педагогическа система на Песталоци; на нея се отделя изключително значение в общото образование и развитие на мисловната дейност на учениците. Идеите на Песталоци оказват голямо влияние върху Щайнер и го подтикват по нататък да се заеме със синтетична проективна геометрия. Впоследствие, вече като член на Берлинската академия на науките, Щайнер пише в предговора си към най-важната си работа “*Системно развитие на зависимостта на геометричните образи един от друг*” (ч.1, 1896):

*Тук думите *анализ* и *синтез* се употребяват в нестандартен смисъл: аналитичната геометрия използва метода на координатите, в резултат на което става възможно прилагането на анализа и алгебрата в геометрията; синтетичната геометрия оперира с непосредствени пространствени или равнинни конструкции.

“Предлаганото произведение се опитва да разкрие този механизъм, посредством който са свързани най-разнообразните явления в пространството. Съществува твърде ограничен брой твърде прости основни съотношения, отразяващи тази схема, по която останалата маса положения се развиват последователно и без всякакви затруднения. Чрез усвояване броя на тези (неголям брой) основни съотношения ставащ стопанин на целия предмет; редът идва на мястото на хаоса и виждаш как всички части се опират естествено една на друга, разполагат се в прекрасен ред и се съединяват в удачно разграничени групи. По такъв начин става възможно овладяването на тези елементи, от които произлиза природата, за да може с възможно най-голяма икономия по най-прост начин да се *придадат* на фигурите неизброимо множество от свойства.”

Основната идея в работите на Щайнер е проективното образуване на по-сложни геометрични образи от по-прости. Така например, изхождайки от два обикновени проективни снопа от прави, наречени *снопове от първи ред*, той стига до определение на крива от втори ред като геометрично място от точки, получени при пресичането на съответните прави от дадените два снопа. По аналогия геометричното място на прави, съединяващи съответните точки на два обикновени проективни реда (от първи ред), образува т. нар. *сноп от втори ред*, представляващ съвкупност от допирателните към крива от втори ред. Щайнер разглежда проективното преобразуване като верига от последователни проективни преобразования и определя проективно съответствие на две форми от първа степен (например праволинеен ред и сноп прави или два реда, или два снопа) като преобразуване запазващо сложното отношение на четири елемента. По-голямата част от идеите и способите на Щайнер не са нови, но той ги определя точно и ги излага системно. По-широко изложение върху тези проблеми, читателят би могъл да намери в [2, 3].

В следващата точка ще формулираме основната задача, за която повече подробности и интересни исторически бележки могат да се намерят в [1].

По стъпките на Я. Щайнер. Задачата. Като ученик в пансиона на Песталоци, Щайнер много бързо привлякъл вниманието на преподавателите със своите изключителни способности. На следната задача той веднага намерил едно просто решение:

Даден е правилен петогълник. Да се раздели на две равнолицеви части с права успоредна на една от страните му.

Задачата не е много лесна. Този, който успее да достигне до решението, непременно ще изпита уважение към проникновения начин на мислене у Щайнер. Ако задачите са били трудни, Щайнер не е щадял усилията за откриване на отговора. Може би по повод решаването на една задача е и записката му, която била намерена: “*решено в събота, 10 декемврий, 1814, един часа през нощта, 3+3+4 часа в търсене на отговор.*”

Първо решение (Щайнер). Двете решения, които ще бъдат изложени тук удивляват с това колко тясно са свързани помежду си синтетичните и аналитичните методи. Щайнер-синтетикът наред с изящните геометрични нагледы и построения се възползва умело от аналитични методи, в случая методи от линейната алгебра.

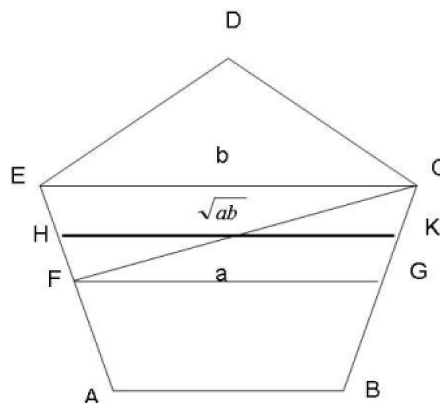
Нека правилният петогълник е $ABCDE$. Първата стъпка от решението е да

прекараме симетралата CF на страната AE . Тя разделя петогълника на две равнолицеви части, но не удовлетворява условието да е успоредна на една от неговите страни. Нека правата, минаваща през F и успоредна на AB , пресича BC в точка G . Да разгледаме трапеца $CEFG$ и да означим основите му с $FG = a$ и $CE = b$. Диагоналът на този трапец го разделя на два триъгълника - CFG с лице I_1 и CEF с лице I_2 . Очевидно е изпълнено отношението

$$(1) \quad I_1 : I_2 = a : b.$$

Така поставената задача се свежда до задачата да се прекара права, успоредна на AB , която да разделя лицето на трапеца $CEFG$ в отношение $a : b$. Да означим краищата на тази разделяща отсечка с H и K и да положим $HK = c$. Освен това да означим с x и y разстоянията съответно между a, c и c, b . С помощта на тези величини можем да запишем аналитично условието за HK . За лицата I_1 и I_2 е изпълнено

$$(2) \quad 2I_1 = (a + c)x, \quad 2I_2 = (b + c)y.$$



Черт. 1

От (1) и (2) следва, че $a : b = (a + c)x : (b + c)y$. Това отношение лесно се преобразува до уравнението

$$(3) \quad (a + c)bx - (b + c)ay = 0.$$

То е линейно спрямо неизвестните величини x и y . Едно друго линейно уравнение получаваме от отношението $x : y = (c - a) : (b - c)$, което заради по-нататъшните ни разглеждания записваме във вида

$$(4) \quad (b - c)x + (a - c)y = 0.$$

Това уравнение също е линейно спрямо x и y . От уравненията (3) и (4) ще намерим c . Да ги запишем още веднъж заедно

$$(5) \quad \begin{cases} (a - c)bx - (b + c)ay = 0 \\ (b - c)x + (a - c)y = 0. \end{cases}$$

В системата (5) неизвестни за нас са величините c, x и y , докато уравненията са само две. Това обаче все още не е причина да се откажем от решаването на задачата. При по-внимателно разглеждане на системата забелязваме, че уравненията в нея не съдържат събираеми, в които да не фигурират x и y . Така да се каже, системата (5) е линейна и хомогенна спрямо x и y . Ние очакваме от тази система да получим различни от нула решения за x и y , понеже страните на трапеците a, b и c са сигурно две по две различни. От линейната алгебра е известно, че за да има една хомогенна линейна система ненулево решение е достатъчно матрицата на тази система да е особена, т.е. детерминантата ѝ да е нула. В нашия случай това условие изглежда

така

$$(6) \quad (a - c)b : (b - c) = (b + c)a : (c - a).$$

В тази пропорция неизвестна е само величината c (дължината на търсената отсечка). От (6) получаваме израз за c , който ни дава ключа за нейното построяване. Като се освободим от знаменателите в (6), получаваме

$$(b^2 - c^2)a + (a^2 - c^2)b = 0,$$

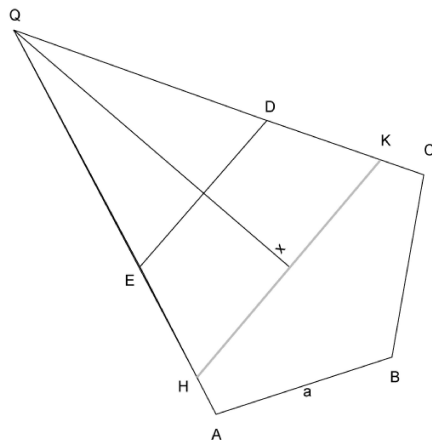
откъдето след кратки преобразования намираме

$$c = \sqrt{ab},$$

т.е. дължината c на търсената отсечка HK е средно геометрична на страните a и b на трапеца.

Второ решение. Да означим страните на петоъгълника $AB = BC = CD = ED = AE = a$. Търсената HK да означим с x (черт. 2). От условието имаме, че

$$(7) \quad S_{HKDE} = S_{ABCKH}.$$



Черт. 2

Очевидни са следните твърдения:

Lemma 1. Лицето на правилен n -ъгълник със страна a е $S = \frac{n}{4}a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

Lemma 2. Изпълнено е равенството $\operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

От (7) и Лема 1 следва, че

$$(8) \quad S_{HKDE} = \frac{5}{8}a^2 \operatorname{ctg} 36^\circ = \frac{5a^2}{8 \operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Тъй като $\triangle HKQ \sim \triangle EDQ$, то следва, че

$$(9) \quad \frac{S_{\triangle HKQ}}{S_{\triangle EDQ}} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{S_{HKDE} + S_{\triangle EDQ}}{S_{\triangle EDQ}}.$$

От друга страна

$$(10) \quad S_{EDQ} = \frac{QP \cdot DE}{2} = \frac{\frac{a}{2} \operatorname{tg} 72^\circ}{2} a = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} 72^\circ.$$

От (8), (9), (10) и лема 2 следва

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} &= \frac{S_{\triangle HKQ}}{S_{\triangle DEQ}} = \frac{\frac{5a^2}{8 \operatorname{tg} 36^\circ} + \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} 72^\circ}{\frac{a^2}{4} \operatorname{tg} 72^\circ} = \frac{\frac{5}{2 \operatorname{tg} 36^\circ} + \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ} = \frac{\frac{5}{2 \operatorname{tg} 36^\circ} + \frac{2 \operatorname{tg} 36^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 36^\circ}}{\frac{2 \operatorname{tg} 36^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 36^\circ}} = \\ &= \frac{5 - 5 \operatorname{tg}^2 36^\circ + 4 \operatorname{tg}^2 36^\circ}{2 \operatorname{tg} 36^\circ (1 - \operatorname{tg}^2 36^\circ)} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 36^\circ}{2 \operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{5 - \operatorname{tg}^2 36^\circ}{4 \operatorname{tg}^2 36^\circ} = \frac{5 - 5 + 2\sqrt{5}}{4(5 - 2\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}}{2(5 - 2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{\sqrt{5}(5 + 2\sqrt{5})}{10} = \frac{10 + 5\sqrt{5}}{10} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Оттук можем да запишем, че

$$x = a \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}},$$

с което задачата е решена още един път с помощта на аналитични и построителни методи. Решението е двойна ирационалност, което означава, че може да бъде построено с линейка и пергел, а тъй като ние знаем страната на правилния петобъгълник, то тогава можем да намерим и търсената отсечка.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. ЛЕМАН. Занимателна математика, Държавно издателство “Народна просвета”, София, 1984 г. Превод: Любомир Давидов, Цветан Ралчевски, 1984г. Оригинално заглавие: “Kurzweil durch Mathe”, Urania-Verlag Leipzig-Jena-Berlin, 1980.
- [2] Г. И. ГЛАЗНЕР. Беседи по история на математиката, “Народна просвета”, 1988.
- [3] С. Г. ГИНДИКИН. Рассказы о физиках и математиках, МЦНМО, НМУ, 2001.

Живко Желев
 Тракийски университет
 Катедра Математика, информатика и физика
 Аграрен факултет
 Студентски град
 6000 Стара Загора, България
 e-mail: zhelev@uni-sz.bg, jjeleff@yahoo.com

OVER ONE STEINER'S PROBLEM AND THE CONNECTION BETWEEN ANALYTIC AND SYNTHETIC GEOMETRY

Zhivko I. Zhelev

The main goal of this article is to show how the analytic and synthetic methods in geometry are connected to each other. As a working example, a specific problem due to Jacob Steiner has been chosen and as a result this problem has been solved in two different ways. The first solution is due to Steiner and the second is due to the author of the article. The common characteristic for these solutions is that they combine elements of analytic and synthetic elementary geometry.