

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2006
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2006
Proceedings of the Thirty Fifth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 5–8, 2006

**ЕЛЕМЕНТИ ОТ ТЕОРИЯ НА ГРАФИТЕ В
ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА В ПЕТИ
И ШЕСТИ КЛАС**

Маряна Г. Кацарска

В доклада се предлагат методически идеи относно пропедевтика на понятието граф в извънкласната работа по математика с учениците от пети и шести клас. Предложени са задачи, чието описване (моделиране) и решаване е свързано с изучаване на елементарно ниво на понятията пълен граф, непълен граф, ориентиран граф, неориентиран граф, цикъл, Ойлеров цикъл и др. Разгледаните задачи елегантно и лесно се решават с помощта на теория на графите.

Математиката изглежда труден и скучен предмет за по-голяма част от учениците в масовото училище. За съжаление в много от случаите вината не е само в учащите се, защото в повечето случаи от тях се изисква да възпроизведат преподаденият от учителя материал. Много често на учениците не се посочва приложението на изучаваните теоретични знания и това е една от причините да смятат математиката за досаден и сложен за изучаване предмет. Извънкласните форми на работа по математика предлагат по-богати възможности за повишаване интереса към предмета и развитие на математическото мислене и творческите способности. Чрез тях се повишава равнището на интелектуалното развитие като се формират умения за самостоятелно възприемане, анализиране и осъзнаване на информацията; могат да се покажат редица приложения на разглеждания материал в практиката. Учениците повишават интереса си към предмета, когато новото знание произтича по естествен път от познати факти и явления, и е свързано с опита и потребностите им; чувстват силата на математическите идеи и методи, разбират колко много и какви задачи могат да решат с новите знания.

Несъмнена е ползата от запознаването на учениците с основни понятия от теория на графите, които в повечето случаи не изискват предварителни математически познания. Решенията на много задачи се опростяват, ако бъдат описани с графи. С тяхна помощ сполучливо се онагледява разглеждания проблем и по този начин се осигурява нагледна опора на мисленето. Наред с това много решения стават убедителни и разбираеми, когато се използва теория на графите.

Разглеждането на интересни практически проблеми, поднесени в атрактивен за ученика стил (повече идеи, само частични доказателства, липса на тромави теоретични знания) може да събуди интереса на ученика. Неговата мотивация впоследствие се превръща в съществен, мощен фактор за нови и по-трайни математически интереси и знания.

Да разгледаме следните две задачи:

Зад. 1. Спонсор подарил на 5 участника във футболен турнир: Ангел, Боян, Васил, Георги и Даниел спортни екипи: червен (на ЦСКА), син (на Левски), бял (на Славия), зелен (на Пирин) и оранжев (на Литекс). Между момчетата се разгорял спор кой какъв екип да получи.

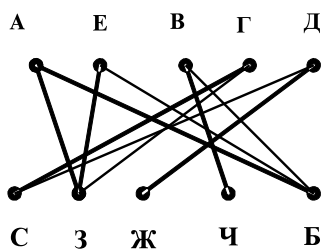
- Аз искам синия! – казал решително Георги.
- Не, аз също искам синия, защото съм от Левски – възразил Даниел.
- Добре, съгласен съм да отстъпя синия, ако на мен ми дадат зеления – проявил великодушие Георги.
- А на мен жълтия - отстъпил великодушно и Даниел.
- Аз искам червения или белия екип – казал Васко.
- Не, аз ще взема белия – в хор извикали Ангел и Боян – или зеления – добавили те едновременно.

Може ли така да разпределят екипите, че всеки да получи екип с предпочитан от него цвят?

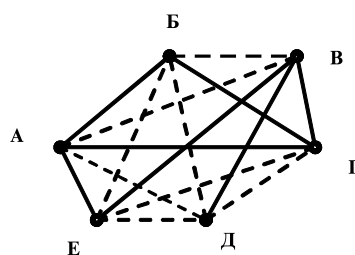
Зад. 2. Пет момичета (Анета, Елена, Вяра, Галя, Диана) и пет момчета (Симеон, Здравко, Живко, Чавдар, Борис) отишли на дискотека. Знаете, че: Симеон се познава с Галя и Диана; Здравко – с Анета, Елена и Галя; Живко се познава с Диана; Чавдар – с Вяра; Борис – с Анета, Елена и Вяра. Можете ли така да разпределят партньорите за танци, че всеки да танцува с партньор, който познава?

На пръв поглед това са различни задачи. В едната се говори за разпределяне на спортни екипи, в другата – за определяне на двойки за танци. Ако преведем тези задачи на езика на теория на графите, учениците ще забележат бързо, че това е една и съща задача и с решаването на една от тях се решава и другата.

Да се опитаме да построим модел за ситуацията, описана във втората задача. Изобразяваме момичетата и момчетата с точки, които означаваме с първите букви от имената им. Свързваме с линия всяко момиче и момче, които се познават. Получава се чертеж 1, състоящ се от точки и линии, които ги свързват.



Чертеж 1



Чертеж 2

В математиката такова **множеството от точки и свързващи ги линии се нарича граф**. Точките се наричат **върхове** на графа, а свързващите ги линии

– **ребра** на графа. Ако има върхове, които не са свързани помежду си, графът се нарича **непълен**. Ако всеки два върха на един граф са свързани помежду си, той се нарича **пълен**. Графът, изобразен на чертеж 1, е непълен, а на чертеж 2 – пълен.

От чертеж 1 се вижда, че за да решим задачата, е достатъчно да изберем 5 линии (ребра), които нямат общ връх (всеки танцува само с един партньор). Това е сравнително лесно. До върховете Ж и Ч има само по една линия съответно от върховете Д и В. Това означава, че Диана ще танцува с Живко, а Вяра – с Чавдар и това са единствените възможности за тях. Върхът С е свързан с Г и Д, т.е. Симеон трябва да танцува с Галя или Диана. Понеже Диана вече е заета, то Симеон ще танцува с Галя. Остава да определим партньорите на Анета и Елена. Тъй като и двете познават Здравко и Борис това може да стане по два начина: Анета със Здравко и Елена с Борис или Анета с Борис и Елена със Здравко. Може ли по друг начин да разпределим партньорите за танци и защо? (От графа на чертеж 1 се вижда, че задачата няма други решения.)

Ако в задача 1 изобразим момчетата и спортните екипи с точки, които означим с първите букви съответно на имената (само че с Е означаваме Боян) и на цветовете се получава отново чертеж 1.

Когато линиите на графа не са ориентирани, т.е. не е указана посока за връзка, графът се нарича **неориентиран**. Когато линиите са с указана посока, графът се нарича **ориентиран**. Графът на чертеж 1 е неориентиран, а на чертеж 3 е ориентиран. С пълен граф могат да се описват игри от типа всеки срещу всеки. Да разгледаме такава игра.

Зад. 3. *В първенство по тенис на маса участват Анета, Борислава, Веска, Галина, Дима и Елена, и всеки играе срещу всеки точно по веднъж. До настоящия момент са проведени срещите на: Анета с Борислава, Галина и Елена; Борислава с Анета и Галина; Веска с Галина, Дима и Елена; Галина с Анета, Борислава и Веска; Дима с Веска; Елена с Анета и Веска. Колко срещи са проведени до настоящия момент и колко още остават?*

Един възможен и лесен начин да решим тази задача е следният. Изобразяваме участниците с точки: Анета с А, Борислава с Б и т.н. Ако две участнички вече са играли помежду си, ги свързваме с плътна линия, ако не са играли – с прекъсната линия, както е показано на чертеж 2. Чрез непосредствено преброяване на ребрата се установява, че са изиграни седем срещи (7 плътни ребра), а остават осем непроведени срещи – колкото са прекъснатите ребра. Ако не се използва граф, има опасност някоя среща да се брои два пъти (Анета – Галя и Галя – Анета) или да се сбърка при определяне броя на несъстоялите се срещи.

Много задачи се формулират словесно по твърде тромав и сложен начин. Това може да се избегне с използване езика на теория на графите.

Зад. 4. *Резултатите от проведени баскетболни срещи между пет училища са дадени на чертеж 3, като стрелката е насочена от победителя към победения. Колко победи има второ училище? Кои училища са победили трето училище? Кое училище има най-много победи?*

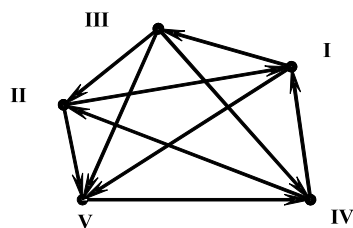
От чертежа на задачата е очевидно, че информацията, представена във вид на граф, е по-нагледна, лесна за възприемане и насочваща към верния отговор.

Някои задачи, които изглеждат сложни и невъзможни за разглеждане при помалките ученици, се решават елегантно чрез графи. Илюстрация на казаното е следващата задача. За ученици от горния курс тя може да бъде обобщена за произволен брой отбори и победи [1].

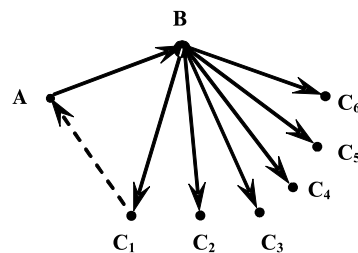
Зад. 5. В турнир по волейбол участват десет отбора. Ако два отбора имат по шест победи покажете, че сред всички участници могат да се намерят три отбора, такива че първият е победил втория, вторият е победил третия, а третият е победил първия.

Решение. Нека А и В са отборите с по шест победи и освен това А е победил В. Означаваме със $C_1, C_2, \dots, C_6$ отборите, победени от В (чертеж 4). Отборът А не може да е победил всички отбори $C_1, C_2, \dots, C_6$, защото в този случай той би имал 7 победи (победил е и В). Следователно сред горепосочените отбори има поне един, например C_1 , който е победил А. Тогава А побеждава В, В побеждава C_1 и C_1 побеждава А.

За отборите А, В и C_1 казваме, че образуват **цикъл**.



Чертеж 3



Чертеж 4

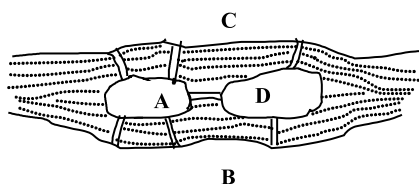
С графи могат да се описват много реални ситуации: картата на железопътните линии в страната, планът на градската водопроводна мрежа, планът на улиците в дадено населено място и др.

Зад. 6. Изобразете с граф улиците и кръстовищата на квартала, в който живеете (кръстовищата са върхове, а улиците – ребра на графа).

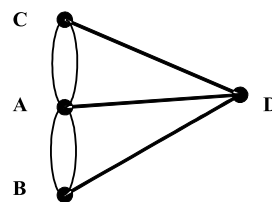
Търсенето на най-добри маршрути за движение лесно се осъществява чрез теория на графите. Един особен тип маршрути е свързан с прочутата задача за Кьонигсбергските мостове.

Зад. 7. В град Кьонигсбергс, разположен на двата бряга на река Прегола и на два острова в нея, преди повече от 200 години имало 7 моста, свързващи отделните части на сушата (чертеж 5). Известният математик Леонард Ойлер бил на 30 години, когато се заинтересувал възможно ли е жител на града да излезе от дома си, да премине през всеки мост точно по веднъж и да се върне отново в къщи [2].

Решение. Нека частите на града А, В, С, Д са върхове на граф, а свързващите ги мостове – ребрата на този граф (чертеж 6). Тогава задачата за седемте моста може да се формулира така: Като се тръгне от някой връх на графа възможно ли



Чертеж 5



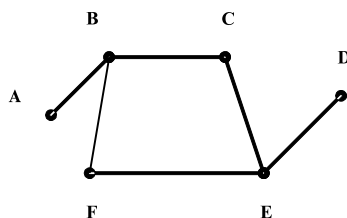
Чертеж 6

е да се начертае фигурата от чертеж 6, без да се вдига молива от хартията, така че всяка линия да бъде начертана само веднъж и да завършим в изходната точка.

В случая това е невъзможно! Който и връх на графа да изберем за начална точка, то на всяко “изходящо” ребро – мост, по който ще напуснем съответната част на града, ще съответства “входящо” ребро – мост, по който ще влезем в тази част на града. Следователно общият брой на ребрата във всеки връх би трябвало да е четен. Графът на задачата съдържа само нечетни върхове. Следователно такъв маршрут не съществува.

Задачата можем да решим и чрез изчерпване на всички възможни маршрути за движение. Ако обаче мостовете са не са 7, а 700 и частите от сушата не са 4, а 400, тогава практически е невъзможно чрез проверка да се търси и намери решение. Налага се да използваме известни твърдения от теория на графите.

От всеки връх на графа излизат четен или нечетен брой ребра. В първия случай върхът се нарича **четен**, а във втория – **нечетен**. Например, на чертеж 7 върховете С и F са четни, а останалите – нечетни.



Степени на върховете

A – 1 B – 3 C – 2

D – 1 E – 3 F – 2

Брой на ребрата

$(1+3+2+1+3+2) : 2 = 6$

Чертеж 7

Броят на ребрата, излизащи от един връх, се нарича **степен** на върха.

Броят на нечетните върхове на всеки граф е четно число.

Броят на ребрата на всеки граф е равен на сбора от степените на върховете му разделен на 2 (Чертеж 7).

Зад. 8. Съществува ли граф с върхове, чиито степени са числата:

а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2; б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1; в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

Отг. а) Да; б) Да; в) Не.

Зад. 9. Съществува ли граф, на който три върха са от степен V , седем върха са от степен III и пет върха са от степен VII ?

Отг. Не, защото броят на нечетните върхове е нечетно число.

Зад. 10. В граф от всеки връх излизат по 3 ребра. Може ли броят на ребрата в този граф да е 2006?

Отг. Не, защото ако x е броят на върховете в графа, решението на уравнението $(x \cdot 3) : 2 = 2006$ не е естествено число.

Зад. 11. В едно царство има 100 замъка и всеки от тях е свързан чрез път с 5 от останалите. Намерете общия брой на пътищата, свързващи замъците.

Отг. 250.

Зад. 12. В един клас има 28 ученика и те си разменили снимки помежду си. Възможно ли е 7 от тях да са разменили снимки с 5 от съучениците си, 13 – с 6, а 8 – с 3?

Отг. Не.

Зад. 13. [4] На ученически лагер има повече от 30 и по-малко от 40 деца. Всяко момиче дружи с 3 момчета, а всяко момче – с 5 момичета. Колко са момчетата и колко са момчетата в лагера?

Отг. 20 момичета и 12 момчета.

Зад. 14. Намерете колко диагонала има: а) деветовъгълника; б) шестнадесетовъгълника.

Отг. а) 27; б) 104.

Зад. 15. Три участнички в олимпиада по математика: Ася, Галя и Надя са решили различен брой задачи – 3, 4 и 5. Решенията от Ася задачи не са 4. Галя е решила по-малко задачи от Надя и броят им е нечетно число. По колко задачи е решило всяко момиче? Коя участничка се е представила най-добре?

Отг. Ася – 5, Галя – 3, Надя – 4.

Зад. 16. [3] Борис, Ваньо, Николай и Петьо се класирали на първите четири места в спортно състезание, като всяко от местата е заел само един от тях. На въпроса, кой какво място е заел, трима от тях отговорили:

Борис – Не съм на първо, но не съм и на четвърто.

Ваньо – Не съм на четвърто. На четвърто е Николай.

Петьо – Второ.

Намерете кой какво място е заел, ако всеки от тях е казал истината.

Отг. Ваньо – I, Петьо – II, Борис – III, а Николай – IV.

Опростяването на предложения за изучаване материал е една от първостепенните задачи на методиката на преподаване. Именно опростеното изложение дава възможност редица въпроси да се предложат за изучаване по-рано, да се пренесат в по-малките класове. Такова “пренасяне” се явява основен резерв за усъвършенстване на математическото образование. Чрез разглежданите по-горе задачи учениците се обучават да построяват математически модели, подобни на реални явления и ситуации. В по-малките класове се отделя повече внимание на овладяването от учащите се на математическите методи за търсене на решение чрез логически разсъждения. Трябва да обучаваме учениците как да разсъждават, за да бъде мисленето им

свързано, последователно и непротиворечиво. Неслучайно М. И. Калинин казвал на своите ученици, че “математиката дисциплинира ума, приучва го към логическо мислене”. Математическите знания могат да се прилагат умело и да бъдат полезни, само ако са усвоени творчески и обучаваните забележат как самостоятелно могат да достигнат до тях и да ги прилагат.

Предложеният за разглеждане материал е илюстрация за прилагане на принципите за достъпност и нагледност в обучението по математика и как математическия модел на задачата подсказва решението или дава идея за намирането му. Всичко това допринася за повишаване на интереса на учениците към математиката, калява волята и упоритостта им при търсене на решението, създава положителни емоции – удовлетвореност от постигнатите резултати и увереност в собствените сили и възможности.

Ролята на учителя е да преподава, организира и управлява ученето, така че да формира у обучаваните устойчив познавателен интерес към изучавания материали и положителна мотивация за учене, да осигури ранно изявяване и оптимални условия за развитие на математическите способности на учащите се и да вдъхне увереност в творческите им способности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ю. БЕРЕЗИНА. Графы и их применение. Москва, Просвещение, 1979.
- [2] И. А. МИРЧЕВ. Графи. Благоевград, Унив. изд. "Н. Рилски", 2001.
- [3] К. СЛАВОВ, П. ШОПОВА. Кръжочната работа по математика в 4. и 5. клас на ЕСПУ, София, Народна просвета, 1987.
- [4] Е. В. СМЫКАЛОВА. Дополнительные главы по математике. Санкт-Петербург, СММО Прес, 2005.

Маряна Кацарска
ЮЗУ "Н. Рилски"
Благоевград
e-mail: mariana@aix.swu.bg

ELEMENTS OF THE GRAPH THEORY IN EXTRACURRICULAR EDUCATION IN MATHEMATICS FOR FIFTH AND SIXTH CLASSES

Mariana G. Katsarska

In this research are presented some methodological ideas concerning introduction the concept of graph (object of discrete mathematics) in extracurricular education in the fifth and sixth classes. Some problems are offered, whose description and solutions are connected to the elementary level of study of the concepts: complete graph, incomplete graph, oriented graph, non-oriented graph, cycle, Euler's cycle and est. Using the methods of the graph theory considered problems can be solved in an elegant and easy way.