

ЕВРИСТИЧЕН ПОДХОД ПРИ РЕШАВАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ ОТ ОПРЕДЕЛЕН ВИД*

Васил Б. Милушев, Димитър Г. Френкев

Направено е обобщено описание на определен вид геометрични задачи и подход за решаване, за който е характерно, че при търсенето и откриването на решение съществено значение има отделянето на помощни фигури или допълнителното построяване на такива. С пример е илюстрирано откриването на решение на геометрична задача посредством конструиране на редица от подходящи фигури.

Според В. Й. Крупич [4] компонентите на информационната структура на задачата, които имат отношение към нейната проблемност, са дадено, търсено, базис и метод (способ за решаване). Под базис ние разбираме система от **дедуктивни правила**, състоящи се от закони на съждителното и предикатното смятане, от определения, аксиоми, теореми, и др. от областта, от която е задачата; и от правила за изводи, на които се базира решението ѝ. За да могат учещите ефективно да използват елементи от теорията като дедуктивни правила, е необходимо, под ръководството на учителя, те периодически да актуализират и систематизират знанията си за тези елементи, обединявайки последните в дидактически системи от признаци, респ. от свойства (по Ив. Ганчев [2]).

Когато за решаващият задачата не е известен само метода, или и метода и базиса, то за него задачата е съответно от полуевристичен или от евристичен тип.

В геометрията елементите от теорията, които могат да се използват като дедуктивни правила, се отнасят за определени геометрични фигури. Затова в процес на търсене на решение на геометрична задача (от полуевристичен или евристичен тип) евристична стратегия е да се “върви” не само от дедуктивни правила към фигури, но и обратно – от фигури (в т.ч. и двойки фигури с определена релация), към валидни за тях твърдения, които могат да се използват като дедуктивни правила. Основен метод за решаване на повечето геометрични задачи от училищния курс по математика (УКМ) е методът на параметризацията, който се прилага в комбинация с други методи, най-вече с анализ, синтез, алгебричния метод и др. Характерно за съвместното прилагане на тези методи е, че в процеса на анализа, съобразявайки се с определени достатъчни условия за намиране на търсените елементи, се избират подходящи нови неизвестни параметри (скалари или вектори) и се съставят необходимия брой уравнения за тях. Опитът показва, че добри резултати за определяне на базиса и метода за решаване на геометричната задача дава непрекъснатият стремеж

*Изследванията са направени с финансовото съдействие на фонд НИ при ПУ, договор 05-М-16.

на решаващия да откроява (респ. допълнително да построява) подходящи помощни фигури, съобразявайки се с търсените елементи при прилагане на анализ (респ. – с дадените елементи при прилагането на синтез).

Голяма част от геометричните задачи в УКМ са от вида:

Дадени са фигура F и параметри $p_1, p_2, \dots, p_n$, които я параметризират с точност до определена релация ρ . Търсят се параметри $x_1, x_2, \dots, x_m$, които са инвариантни относно ρ . При задачите за изчисление $x_1, x_2, \dots, x_m$ са параметри-скалари. Целта на прилагането на евристични схеми за търсене на решение на такива задачи е да се открие такава редица от фигури $F_1, F_2, \dots, F_n$, за която е характерно:

1. Съществува естествено число $s < n$ такова, че фигурите $F_1, F_2, \dots, F_s$ се параметризират с точност до релацията ρ с помощта на дадени параметри.

2. За останалите фигури $F_{s+1}, F_{s+2}, \dots, F_n$ да е възможен поне един от случаите:

а) всяка от тях има общи параметри (елементи на нова система параметри) с предходни фигури, които заедно с някои дадени параметри я параметризират с точност до ρ , а $x_1, x_2, \dots, x_m$ са инвариантни спрямо ρ за някои от последните фигури $F_{n-v}, \dots, F_n$, където $v < n - s$.

б) има поне една двойка фигури, притежаващи общ параметър λ („свърз-ващ“ елемент [3]), който заедно с търсените параметри и някои от дадените параметри ги параметризират с точност до ρ така, че съществува система от уравнения за λ и неизвестните параметри, от която може да се изключи λ .

в) има поне една двойка фигури, за които съществуват съответни техни параметри λ_1 и λ_2 такива, че заедно с някои от неизвестните параметри и дадените се параметризират с точност до релацията ρ , и същевременно съществуват връзка $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ (между λ_1 и λ_2), която е инвариантно свойство относно ρ .

По този начин, като се използват характеристиките а), б) или в) и, изключвайки помощните параметри, се образуват m зависимости спрямо $x_1, x_2, \dots, x_m$, от които те могат да бъдат намерени.

Получаването на такава последователност от спомагателни фигури (построени съгласно условието на задачата или допълнително построени) може да стане чрез използване на анализ и синтез в подходяща комбинация. По-важните въпроси, които възникват при анализа, са:

- Търсените елементи на кои други фигури (построени по условие или допълнително построени) са също параметри?

- Кои от тези фигури са параметризирани с точност до ρ и кои не са?

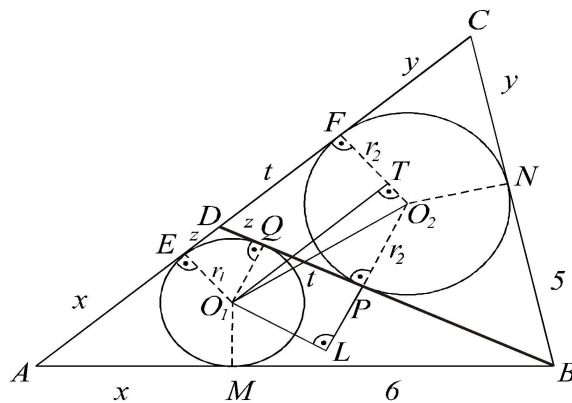
- Кои други неизвестни параметри на последните фигури, от една страна, параметризират заедно с дадени елементи съответната фигура с точност до ρ , от друга – намират се в известна връзка с търсените параметри, а от трета страна – могат да се съставят уравнения за тях, използвайки установени в теорията свойства и релации за съответната фигура?

Ще покажем как се осъществява този подход в следния пример.

Задача. [1] Даден е $\triangle ABC$. Точка $D \in AC$ така, че вписаната в $\triangle ABD$ окръжност k_1 има радиус $r_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, а вписаната в $\triangle BCD$ окръжност k_2 има радиус $r_2 = \sqrt{3}$. Ако M е допирната точка на k_1 с AB и $BM = 6$, а N е допирната точка на k_2 с BC и $BN = 5$, да се намерят дължината на отсечката BD и дължините на страните на $\triangle ABC$.

Анализ. Разглеждаме отсечките BD , BC , CA и AB и фигурите, на които те са елементи: $\triangle ABD$, вписаната в него окръжност $k_1(O_1, r_1)$ и допирните ѝ точки Q, E, M ; $\triangle BDC$, вписаната окръжност $k_2(O_2, r_2)$ и допирните ѝ точки P, F, N (фиг. 1).

Имаме: $BD = BP + PD = BQ + QD$, $AB = BM + AM$, $BC = BN + CN$, $AC = AD + DC = AE + ED + DF + FC$. Но от свойството на допирателните следва, че $BQ = BM = 6$, $BP = BN = 5$, $AM = AE$, $DE = DQ$, $DF = DP$, $CF = CN$. Следователно, за да намерим дължините на отсечките BD , BC , CA и AB , достатъчно е да намерим дължините на $AM = AE = x$, $DE = DQ = z$, $CF = CN = y$, $DF = DP = t$. От равенствата $BD = 6 + z = 5 + t$ следва, че $PQ = t - z = 1$. Значи, за да намерим x, y, z и t , е достатъчно да съставим още три (независими) уравнения за тях. Тъй като са известни радиусите на k_1 и k_2 , възниква въпросът: “Кои дедуктивни правила свързват r_1 и r_2 с дадени или с търсени елементи?”



Фиг. 1.

Опитът ни показва, че не всички учещи включват в дидактически системи от признаци, респ. от свойства, връзката, която съществува между радиуса на вписаната в триъгълника окръжност и страните му. Затова е целесъобразно да се коментира въпросът: “Съществува ли “свързващ” параметър [3], който, от една страна, се изразява чрез радиуса на вписаната окръжност, а от друга, чрез страните на триъгълника?”. Такъв свързващ параметър се явява лицето S на триъгълника, защото за него важат формулите $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и $S = p.r$, където p е полупериметърът му. От тук се получава $p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Като се приложи тази формула за $\triangle ABD$ и за $\triangle BCD$, се получават съответно уравненията $(x + z + 6) \frac{2}{3} \sqrt{3} = \sqrt{(x + z + 6) \cdot x \cdot z \cdot 6}$ и $(t + y + 5) \sqrt{3} = \sqrt{(t + y + 5) \cdot t \cdot y \cdot 5}$.

За да намерим x, y, z и t , достатъчно е да съставим още едно уравнение със същите неизвестни (независимо от другите). Параметрите x, y, z и t са инварианти на еднаквостта. Тъй като разглежданите до тук фигури не са параметризирани до еднаквост, то възниква въпросът: “Кои други фигури да разгледаме, за да намерим връзка между x, y, z и t ?”. Ясно е, че след като изчерпахме комбинациите от

начертаните фигури, трябва допълнително да построим фигури, които включват търсени и дадени параметри. Ориентираме се към допълнително построяване на фигури, които съдържат r_1 , r_2 , BM , BN и, евентуално, намерената отсечка PQ . Един от вариантите за построяване на допълнителни фигури, които да съдържат тези отсечки, е свързването центъра O_1 на окръжността k_1 с точките Q , E , M , A , B и D , от една страна, а от друга – центъра O_2 на окръжността k_2 с точките N , F , P , B , C и D . Но се оказва, че чрез така получените фигури бихме стигнали до познатата вече връзка $S = p.r.$ Затова се насочваме към други варианти на построения, при които се получават фигури, съдържащи като параметри r_1 , r_2 и PQ и някои от неизвестните x , y , z и t . Така стигаме до идеята да построим трапеца EO_1O_2F , за който е характерно, че: той е правоъгълен, $O_1E = r_1$, $O_2F = r_2$ и $EF = z + t$. Опирайки се на опита при работа с трапеци, се досещаме да построим $O_1T \parallel EF$, където $T \in O_2F$. Тъй като трапецът е правоъгълен, то и ΔO_1O_2T е правоъгълен. Освен това $TO_2 = r_2 - r_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ и $O_1T = EF = z + t$. Следователно или трябва да параметризираме ΔO_1O_2T с точност до еднаквост, като намерим още един негов параметър, или трябва да изразим още един негов елемент чрез някои от търсените параметри x , y , z и t (т.е. да го използваме като “свързващ” елемент). Пробваме да намерим първо дължината на отсечката O_1O_2 . За целта построяваме други фигури, на които тази отсечка или части от нея са елементи. Това може да стане по различни начини. Например, тъй като $PQ = t - z = 1$, то както бе уместно да разгледаме правоъгълника EO_1TF , знаейки, че $EF = z + t$, така вероятно е уместно да построим и да разгледаме и правоъгълника PQO_1L . И наистина, лесно се установява, че, от една страна, $LO_1 = PQ = 1$ и $LP = O_1Q = r_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, а от друга – точките L , P и O_2 лежат на една права и значи $LO_2 = LP + PO_2 = r_1 + r_2 = \frac{5}{3}\sqrt{3}$. Тези факти ни насочват към разглеждане на ΔO_1O_2L , който има за страна отсечката O_1O_2 . За него е известно: $\angle O_1LO_2 = 90^\circ$, $LO_1 = 1$, $LO_2 = \frac{5}{3}\sqrt{3}$, т.е. той е определен с точност до еднаквост. Анализът е завършен.

Друг начин е използването на пресечната точка K на отсечките O_1O_2 и PQ и съставяне на система за QK и PK .

Остава да се направи логическа организация на събрания с помощта на обособяването на важни помощни фигури математически материал. Въз основа на нея определяме в каква последователност трябва да разгледаме конструираните в анализа фигури. Например тяхната последователност и съответните им параметри, които ги свързват (при описания начин в анализа), представяме на Схема 1 (вж. по-долу).

Така получаваме системата

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{3}(x+z+6) = \sqrt{6xz(x+z+6)} \\ \sqrt{3}(y+t+5) = \sqrt{5yt(y+t+5)} \\ t-z=1 \\ t+z=3 \end{cases}$$

След намирането на помощните параметри x , y , z и t се изчисляват и търсените елементи BD , BC , AC и AB .

В заключение ще отбележим, че задачите, които се решават с помощта на многок-

$\triangle O_1 O_2 L$ (фиг. 1)	$\sphericalangle O_1 L O_2 = 90^\circ, O_2 L = \frac{5}{3}\sqrt{3}, O_1 L = 1, O_1 O_2^2 = O_2 L^2 + O_1 L^2 \Rightarrow O_1 O_2^2 = \frac{28}{3}$
$\triangle O_1 O_2 T$ (фиг. 1)	$\sphericalangle O_1 T O_2 = 90^\circ, O_2 T = \frac{\sqrt{3}}{3}, O_1 O_2 = \frac{28}{3}, O_1 T = z + t;$ $O_1 O_2^2 = O_1 T^2 + O_2 T^2 \Rightarrow z + t = 3$
$\triangle ABD,$ $k_1(O_1, r_1)$ и д. т. M, E, Q	$S_1 = p_1 r_1 = \sqrt{(p_1 - a_1)(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)} \Rightarrow$ $BQ = BM = 6, AM = AE = x, DE = DQ = z,$ $\Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{3}(x + z + 6) = \sqrt{6x \cdot z \cdot (x + z + 6)}$
$\triangle BCD,$ $k_2(O_2, r_2)$ и д. т. N, F, P	$S_2 = p_2 r_2 = \sqrt{(p_2 - a_2)(p_2 - b_2)(p_2 - c_2)} \Rightarrow$ $BP = BN = 5, CN = CF = y, DF = DP = t,$ $\Rightarrow \sqrt{3}(y + t + 5) = \sqrt{5y \cdot t \cdot (y + t + 5)}$
BD	$BD = BP + PD = BQ + QD \Rightarrow 6 + z = 5 + t \Rightarrow t - z = 1$
$BD, BC,$ AC, AB	$BD = BP + PD = 6 + z, BC = BN + NC = 5 + y,$ $AC = AD + DC = AE + ED + DF + FC = x + z + t + y,$ $AB = AM + MB = 6 + x$

Схема 1

ратно отделяне и построяване на помощни фигури, притежават голям, формиращ потенциал. В хода на търсене на решение се формират и развиват важни умения и способности, като например:

- умения за целесъобразно открояване на помощни фигури (“разлагане” цялото на части), както и за подходящи допълнителни построения (“вграждане” в цялото на нови части);
- умения за откриване и прилагане на подходящи елементи от теорията, чрез които се изгражда важният компонент на информационната структура на задачата – теоретичната база;
- умения за критично мислене, въз основа на което измежду многото комбинации от параметри, елементи на фигури и елементи на теорията, учещите избират най-подходящите съчетания.

Решаването на подобни задачи обогатява съществено опыта на учещия, а рефлексията му върху този опит непрекъснато формира у него умения за изграждане и прилагане на стратегии за евристична дейност.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. К. Величков. Сборник от задачи с повишена трудност за 5-8 клас. С., “Народна просвета”, 1986.
- [2] И. Ганчев. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания). С., ИФ “Модул – 96”, 1999.

[3] З. В. ЛАЛЧЕВ, И. З. ВУТОВА. Свързващ елемент, *Математика и математическо образование*, С., Изд. на БАН, 2003, с. 369–373.

[4] В. И. КРУПИЧ. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. М., Прометей, 1995.

Васил Борисов Милушев
ул. “П.Д.Петков”№ 39, ап. 8
4000, гр. Пловдив, България
e-mail: milushev@pu.acad.bg

Димитър Георгиев Френкев
ул. “Деспот Слав” 28
4700, гр. Смолян, България

AN HEURISTIC APPROACH IN SOLVING GEOMETRICAL PROBLEMS OF A DEFINITE TYPE

Vasil B. Milushev, Dimitar G. Frenkev

There is made out a general description of a definite type of geometrical problems and an approach for solving. For this approach is characteristic that the separation of auxiliary figures or the additional construction of such figures is of essential importance in looking for and finding out solutions. We have demonstrated with an example the finding out of solution of a geometrical problem through out the construction of series of suitable figures.