

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2006
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2006
*Proceedings of the Thirty Fifth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 5–8, 2006*

ЗА СЪДЪРЖАТЕЛНОСТТА НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ ЗАДАЧИ

Милен Н. Найденов

Тази работа представлява обобщение на резултат, за който е работено повече от десет години. Изследвано е едно от свойствата на математическите задачи, което е наречено СЪДЪРЖАТЕЛНОСТ. Въз основа на метод, по който се изследва това свойство, задачите могат да бъдат класифицирани. Пет от осемте изследвани задачи са били обект на доклади от предходните пролетни конференции, което показва, че резултати от преди помагат за откриване и въвеждане на понятието СЪДЪРЖАТЕЛНОСТ. Съдържателността е свойство, което позволява математическите задачи да бъдат окачествявани.

През последните десет години в доклади и съобщения на математическите пролетни конференции у нас се представят задачи, които са интересни и привлекателни с нещо. Кога и с какво е привлекателна една задача? Този въпрос се задава от години и все остава без еднозначен отговор. На Двадесетат и петата пролетна конференция се обсъждаше качеството на изпитни математически задачи [1], на Тридесет и четвъртата пролетна конференция се говореше за съдържателни задачи [2] и как се повишава ефективността на обучението по математика. И въпреки това не е ясно кога една математическа задача може да бъде наречена качествена, кога – съдържателна и защо. Очевидно понятието съдържателност се нуждае от прецизиране. Разгледаната в [2] задача може би е наречена съдържателна не на последно място и поради факта, че допуска шест различни начина на решаване. В [5] за понятието съдържателност е посочено, че това е специфична смислова информация, която се съдържа в условието на задачата и самият процес на изследване е разкриване на част от тази информация с всеки нов начин на решаване на задачата. Щом съдържателността е вид информация, то тя може да бъде измервана и тогава по естествен начин от това следва и наредба, т.е. отговор на въпроса коя от две задачи е по-съдържателна. Всяка математическа задача може да получи оценка за съдържателност след прилагане на метода, описан в [6], който е статистически. От Задача 1, разгледана по-долу, се вижда, че оценяването на съдържателността понякога може да се окаже много продължителен процес. За да се получи по-бързо резултат, в [7] е предложен т. н. “експертен метод за оценяване”, при който изследваната задача се оценява, като се предполага, че е налице равномерно разпределение на различните начин на нейното решаване. Така получената оценка е наречена експертна оценка. По своята същност тя е приблизителна, но въпреки това може да бъде използвана, макар че групира задачите в подмножества според броя на различните начини

на решаване. Това се вижда в края на работата от приложените задачи заедно с техните експертни оценки. Експертната оценка за съдържателност се пресмята по формулата: $C = \ln n$, където C е търсената съдържателност и има измерение НАТ, когато основата на логаритъма е числото e , а n е броят на различните начини на решаване на задачата. В случай, че два начина имат обща част в решенията и това може да бъде отчетено, тогава трябва да се има предвид, че n може да не бъде цяло число. Интересен пример за изследване на съдържателността представлява следната задача, давана на приеман изпит във ВВМУ през 1991 г. [9].

Задача 1 (вж. [9]). *През върха на равностранен триъгълник със страна, равна на единица, е прекарана права, която го дели на два триъгълника. Намерете радиусите на окръжностите, вписани във всеки от получените се триъгълници, ако е известно, че единият от тези радиуси е два пъти по-голям от другия.*

Решение. *Първи начин:* Нека ABC е дадения равностранен триъгълник. Означенията според черт. 1 са: $O_1K = x$, $O_2L = 2x$, $KD = DT = y$. Като се използват зависимости между дължините на отсечки, се получава уравнението: $y + 2x\sqrt{3} = \frac{1}{2}$. От подобие на триъгълниците KDO_1 и LDO_2 следва уравнението $2x^2 = y(y + x\sqrt{3})$. Тези две уравнения образуват система с решения за $x_{1,2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{16}$. След отхвърляне на чуждия корен остава:

$$x = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{16},$$

$$2x = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{8}.$$

Втори начин: Прилагаме косинусова теорема за триъгълник ADC

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \frac{1}{2}.$$

Полагаме $AD = u$ и тъй като по условие $4AC = 1$, то за CD получаваме $CD^2 = u^2 + 1 - u$. Ще докажем, че $CD = 3u$.

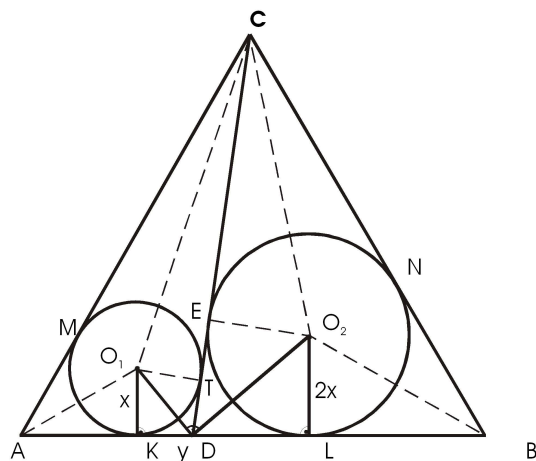
Наистина $CD = CT + TD = 1 - AM + y = 1 - x\sqrt{3} + y = 1 - x\sqrt{3} + \frac{1}{2} - 2x\sqrt{3} = 3\left(\frac{1}{2} - x\sqrt{3}\right)$, но $u = AD = AK + KD = x\sqrt{3} + y = x\sqrt{3} + \frac{1}{2} - 2x\sqrt{3} = \frac{1}{2} - x\sqrt{3}$.

Тук използваме, че $y = \frac{1}{2} - 2x\sqrt{3}$. Получаваме квадратното уравнение

$$9u^2 = u^2 + 1 - u, \text{ т.е.}$$

$$8u^2 + u - 1 = 0,$$

с корени $u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{16}$.



Черт. 1

Явно, че $AD > 0$ и следователно $AD = \frac{-1 + \sqrt{33}}{16}$, т.е. $\frac{-1 + \sqrt{33}}{16} = \frac{1}{2} - x\sqrt{3}$, т.е.
 $x = \frac{3\sqrt{3} - 11}{16}$.

При този начин по-лесно отхвърлихме чуждия корен на квадратното уравнение, защото той се оказа отрицателен, докато при първия начин трябваша допълнителни разсъждения.

Трети начин: При така въведените дотук означения, т.е. $r_1 = x$, $r_2 = 2x$, $AD = u$, въвеждаме още едно $CD = z = \sqrt{u^2 + 1 - u}$. Понеже

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{u}{1-u} = \frac{\frac{1+u+z}{2} \cdot x}{\frac{2-u+z}{2} \cdot 2x},$$

стигаме до системата

$$\begin{cases} z = \sqrt{u^2 + 1 - u} \\ 4u - u^2 - 1 = z - 3uz \end{cases},$$

откъдето след елиминирание на z следва уравнението

$$8u^4 - 7u^3 - 2u^2 + u = 0,$$

с корени $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{16}$. Тъй като $u = AD$, следователно $0 <$

$AD < 1$, тук също лесно определяме, че решение на задачата е $u = \frac{-1 + \sqrt{33}}{16}$.

По-нататък $z^2 = u^2 - u + 1 = \frac{(-1 + \sqrt{33})^2}{16^2} - \frac{-1 + \sqrt{33}}{16} + 1 = \frac{306 - 18\sqrt{33}}{16^2} = \frac{9(34 - 2\sqrt{33})}{16^2}$, т.е. $z = \frac{3}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{33}} = \frac{3(\sqrt{33} - 1)}{16}$ и намерихме, че $z = 3u$.

Пресмятаме $2p = 1 + u + z$, т.е. $p = \frac{3 + \sqrt{33}}{8}$ и от известните формули $S_{AMC} = \frac{AC \cdot AM}{2} \sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{11}}{64}$ и от $S = p \cdot x$ определяме $x = \frac{S}{p} = \frac{8(-\sqrt{3} + 3\sqrt{11})}{64(3 + \sqrt{33})} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{16}$.

Четвърти начин: При решаване на задачи изборът на неизвестни величини е много важен за получаване на рационални решения. При тази задача е логично един от търсените радиуси (в случая по-малкия) да бъде означен с x . Коя да бъде втората неизвестна и каква да бъде тя? В предложения първи начин за решаване за втора неизвестна у бе избрана отсечка, т.е. линейна величина.

Сега за втора неизвестна величина ще изберем ъгъл $ACD = \alpha$. Тогава $AM = x \cotg 30^\circ$, $CM = x \cotg \frac{\alpha}{2}$ и $AM + CM = 1$, т.е.

$$(1) \quad x \left(\sqrt{3} + \cotg \frac{\alpha}{2} \right) = 1.$$

Ясно е, че ъгъл BCD е равен на $60^\circ - \alpha$, ъгъл BCO_2 е равен на $30^\circ - \frac{\alpha}{2}$, тъй като O_2 е център на вписаната в триъгълник BCD окръжност, O_1 е център на вписаната

в триъгълник ADC окръжност и следователно ъгъл O_1CO_2 е 30° . Имаме още

$$BN = 2x \cdot \cotg 30^\circ, \quad CN = 2x \cdot \cotg \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \text{ и}$$

$$(2) \quad 2x \left[\sqrt{3} + \cotg \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right] = 1.$$

От равенства (1) и (2) получаваме

$$x \left(\sqrt{3} + \cotg \frac{\alpha}{2} \right) = 2x \left[\sqrt{3} + \cotg \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \text{ и при } x \neq 0 \text{ следва}$$

$$\cotg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} + 2 \cotg \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Получаваме следното квадратно уравнение спрямо $\cotg \frac{\alpha}{2}$:

$$\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - 4\sqrt{3} \cotg \frac{\alpha}{2} + 1 = 0,$$

с решения $\left(\cotg \frac{\alpha}{2} \right)_{1,2} = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{11}$. Като отчетем, че $\frac{\alpha}{2} < 30^\circ$, то следва $\cotg \frac{\alpha}{2} =$

$$2\sqrt{3} + \sqrt{11} \text{ и } x = \frac{1}{3\sqrt{3} + \sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{16}.$$

Пети начин: При този начин отново неизвестният ъгъл е ACD и също е означен с α . Нека центровете на вписаните окръжности съответно в триъгълник ACD и в триъгълник BCD са O_1 и O_2 . По условие коефициентът на подобие на двата правоъгълни триъгълника AKO_1 и BLO_2 е 2. Следователно $BL = 2 \cdot AK$. Това заедно с известните формули $BL = \frac{BC + BD - CD}{2}$ и $AK = \frac{AD + AC - CD}{2}$ води до следното уравнение $2AD - CD - BD + 1 = 0$. От синусова теорема за триъгълници ACD и BCD имаме $AD = \frac{\sin \alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)}$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin(60^\circ + \alpha)}$ и $DB = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)}$.

След заместване в горното уравнение и преработване се получава $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Оттук $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$ и тогава $\sin(60^\circ + \alpha) = \sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{33}}{4\sqrt{3}}$.

Вече лесно пресмятаме $CD = \frac{6}{1 + \sqrt{33}}$, $AD = \frac{2}{1 + \sqrt{33}}$ и $AK = \frac{1 + AD - CD}{2} =$

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{11} - \sqrt{3})}{2(1 + \sqrt{33})}. \text{ Накрая } x = AK \cdot \tg 30^\circ = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{33})} = \frac{3\sqrt{3} - 11}{16}.$$

През 1991 г. при проверката на конкурсните работи авторът е посочил в [9] три различни начина за решаване на тази задача. След седем години в списание МАТЕМАТИКА [8] са публикувани два други начина. При тези условия се получава разпределение с честоти на съответните начини $p_1 = 0,35$; $p_2 = 0,35$; $p_3 = 0,15$; $p_4 = 0,1$; $p_5 = 0,05$, при което методът от [6] дава съдържателност $C = 1,3995$ НАТА. Експертната оценка на същата задача при пет различни начина е $C = 1,6094$ НАТА.

Трябва да се отбележи, че от някои междинни резултати, получени по време на изследването, може да се правят различни изводи. Примерно, от стойностите на честотите на различните начини, срещани в изследването, може да се види има ли

доминиращ начин и да се обследва на какво се дължи това: дали на добро усвояване на материала от отделен раздел, добро преподаване или на някои други причини.

От посоченото дотук се вижда, че една задача, която е обект на изследване от 1991 г., може да получи достоверна оценка за съдържателност едва сега (2005 г.), тъй като е изследвана при различни условия. Ако бе известен експертният метод тогава, тя би получила експертна оценка за $n = 3$, $C = \ln 3 \approx 1,0986$ НАТА. След това при намиране на нови начини за решаване тази оценка може само да се подобрява. Досега експертната оценка е достигнала стойност за $n = 5$, $C = \ln 5 \approx 1,6094$ НАТА.

На Тридесет и четвъртата пролетна конференция в Боровец някои колеги споменаха, че всеки учител се сблъсква с такъв тип съдържателни задачи, но ги отминава, вместо да ги записва и съхранява. Следователно такива задачи съществуват, но те не са разкрити и изследвани. Накрая са посочен и още седем задачи, които, благодарение на своята по-голяма съдържателност, сега вече измерена, са били обект на разработки предимно в доклади на нашите пролетни конференции. След всяка задача е посочена получената експертна оценка за съдържателност с дименсия НАТ.

В заключение се налага изводът, че съдържателността е само едно от многото свойства, според които една математическа задача може да бъде окачествявана.

Задача 2 (вж. [2]). *Върху страните AB и CD на квадрата $ABCD$ са отбелязани точките M и N съответно. Правите CM и BN се пресичат в точка P , а AN и MD – в точка Q . Да се докаже, че $PQ \geq \frac{1}{2}AB$.*

Посочени са шест начина на решаване, което води до $C = 1,7918$ НАТА.

Задача 3 (вж. [3]). *В триъгълника ABC е вписана окръжност, допираща се до страните AB и BC съответно в точки M и N . Ъглополовящата l на ъгъла BAC пресича правата MN в точка A_1 . Да се докаже, че CA_1 е перпендикулярна на l .*

Посочени са шест начина на решаване, което води до $C = 1,7918$ НАТА.

Задача 4 (вж. [4]). *Да се докаже, че за всяко реално $x \neq 1$, съществува остър ъгъл α , чиито косинус е равен на $\frac{x^2 + 2}{2x^2 - 2x + 3}$.*

Посочени са пет начина на решаване, което води до $C = 1,6094$ НАТА.

Задача 5 (вж. [4]). *В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) с ъгъл $C < 60^\circ$ е прекарана ъглополовящата на ъгъл BAC , която пресича бедрото BC в точка L . От точката L е издигнат перпендикуляр към тази ъглополовяща до пресичането му с правата AB в точка K . Да се намери лицето на триъгълник ABC , ако $AB = a$, $BK = b$ ($a > b$).*

Посочени са пет начина на решаване, което води до $C = 1,6094$ НАТА.

Задача 6 (вж. [4]). *Да се реши уравнението $1 - 2\sin^2 2x + 2\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$.*

Посочени са пет начина на решаване, което води до $C = 1,6094$ НАТА.

Задача 7 (вж. [10]). *Произволна равнина пресича последователно околните ръбове на правилна четириъгълна пирамида в точки, намиращи се на разстояния a , b , c , d от върха на пирамидата. Да се докаже, че е в сила равенството $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.*

Посочени са четири начина на решаване, което води до $C = 1,3863$ НАТА.

Задача 8 (вж. [5]). Лицето на произволен триъгълник ABC е S и ъгъл ACB е γ . Отсечка с дължина z е с начало върхът C и с край – точка от страната AB и разделя триъгълника ABC на два триъгълника с еднакви вписани окръжности. Да се докаже, че $z^2 = S \cot \frac{\gamma}{2}$.

Посочени са четири начина на решаване, което води до $C = 1,3863$ НАТА.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ч. ЛОЗАНОВ. За качеството на задачите на кандидат – студентските изпити, *Математика и математическо образование*, Двадесет и пета пролетна конференция на СМБ – Казанлък, 1996, 367–370.
- [2] Т. М. ГЕОРГИЕВ. Повишаване на ефективността на обучението по математика чрез подбор на съдържателни задачи, *Математика и математическо образование*, Тридесет и четвърта пролетна конференция на СМБ – Боровец, 2005, 284–288.
- [3] М. Н. НАЙДЕНОВ, Т. СТ. МАДЖАРОВА. Една задача в развитие, *Математика и математическо образование*, Тридесета пролетна конференция на СМБ – Боровец, 2001, 384–388.
- [4] М. Н. НАЙДЕНОВ. Три задачи с по пет решения, *Математика и математическо образование*, Двадесет и осма пролетна конференция на СМБ – Монтана, 1999, 272–278.
- [5] М. НАЙДЕНОВ. Съдържателност на задача 16, *Математически форум*, т. V, бр. 5, септември–октомври, 2003, 145–146.
- [6] М. НАЙДЕНОВ. Метод за пресмятане информацията на една математическа задача, *Математически форум*, т. II, бр. 2, април–юни, 2000, 51–56.
- [7] М. НАЙДЕНОВ. Измерване на информация при експертно оценяване на една задача по математика, Научни трудове на ВВМУ “Н. Й. Вапцаров”, Варна, 2005, 73–75.
- [8] Д. НИКОЛОВ, А. ИВАНОВ. Решаване на задачи чрез въвеждане на неизвестен ъгъл, *Математика*, бр. 5, 1998, 16–17.
- [9] М. НАЙДЕНОВ. Приемните изпити по математика във ВВМУ “Н. Й. Вапцаров”, 1991–1995, Варна 1995, 9–13.
- [10] M. NAYDENOV. Substance of mathematical problem, International conference on naval and marine education “ROMANIAN NAVAL ACADEMY’S 130th ANNIVERSARY”, Constanta, 14–16 November 2002, 102–104.

Милен Н. Найденов
 Висше военно-морско училище
 Катедра Математика и информатика
 9000 Варна, България
 e-mail: anna_bg_2000@yahoo.com

SUBSTANCE OF MATHEMATICAL PROBLEMS

Milen N. Naydenov

This paper describes a research on mathematical problems. A new characteristic of these problems has been discovered, using the information theory. This new characteristics is called SUBSTANCE.