

КОМПЮТЪРНИ МЕТОДИ ЗА ПРЕПОДАВАНЕ И ИЗЛЕДВАНЕ В ДИФЕРЕНЦИАЛНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Грозьо И. Станилов, Славка К. Славова

В настоящата статия ще демонстрираме използването на компютърна алгебра и графика при преподаването на диференциалната геометрия. Едновременно с това ще проличи и възможността за провеждане с компютърни средства на научни изследвания. За целта ще разгледаме следната задача: *Да се изследва произволна линейна комбинация на Листа на Мьобиус и Сфера.*

Забележителната повърхнина *Листа на Мьобиус* се дефинира твърде просто. Взема се правоъгълен лист хартия $ABCD$. Чрез прегъване и съединяване на страната AB със страната DC по-точно A с D и B с C) може да се получи прав кръгов цилиндър с височина AB . Ако обаче се извърши и едно усукване и се съединят A с C и D с B се получава едностранната повърхнина *Листа на Мьобиус* (Фиг. 5).

Листът на Мьобиус има следните параметрични уравнения:

$$Ms: \quad \begin{cases} x_1 = \left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, & x_2 = \left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \\ x_3 = v \sin \frac{u}{2} & (u \in (0, 2\pi), v \in (-1, 1)). \end{cases}$$

Сферата (с радиус 1) има следните параметрични уравнения

$$Sf: \quad y_1 = \sin u \cos v, \quad y_2 = \sin u \sin v, \quad y_3 = \cos u \quad (u \in (0, \pi), v \in (0, 2\pi))$$

В системата Maple тези уравнения се записват по следния начин :

```
x1:=(1+v*cos(u/2))*cos(u); x2:=(1+v*cos(u/2))*sin(u); x3:=v*sin(u/2);
y1:=sin(u)*cos(v); y2:=sin(u)*sin(v); y3:=cos(u);
```

Разглеждаме линейната комбинация от тези две повърхнини:

$$S(a, b) = a.Ms + b.Sf. \quad (a, b - \text{произволни реални числа}).$$

Това означава, че повърхнината $S(a, b)$ има следните параметрични уравнения (написани в системата Maple): (като $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-1, 1)$).

```
l1:=a*x1+b*y1; l2:=a*x2+b*y2; l3:=a*x3+b*y3;
```

Включваме програмата

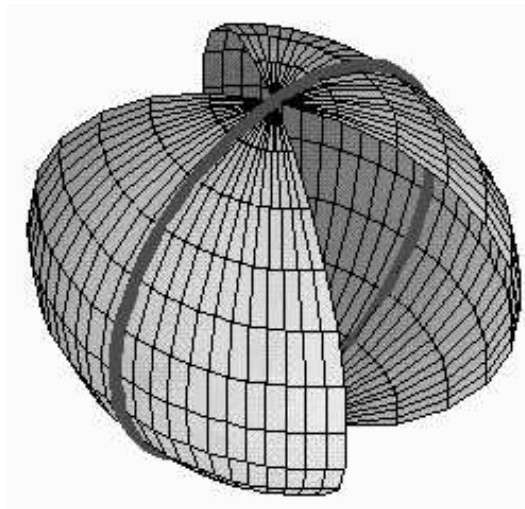
```
with(VectorCalculus):
```

за да запишем векторната функция

```
l:=<l1,l2,l3>;
```

Линията $v = 0$ наричаме *централна линия* за всяка от разглежданите повърхнини.

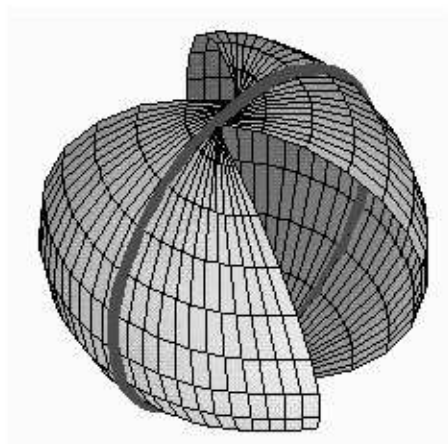
Ще визуализираме няколко повърхнини, съответстващи на определени стойности на параметрите a , b . Централната линия е удебелена.



Фиг. 1

```
with(plots):
p1:=plot3d([eval(l1,[a=0,b=1]),eval(l2,[a=0,b=1]),eval(l3,[a=0,b=1])],
u=0..2*Pi,v=-1..1):
p2:=spacecurve([eval(l1,[a=0,b=1,v=0]),eval(l2,[a=0,b=1,v=0]),
eval(l3,[a=0,b=1,v=0])],u=0..2*Pi,color=red,thickness=4):
display([p1,p2]);
q1:=plot3d([eval(l1,[a=0.1,b=1]),eval(l2,[a=0.1,b=1]),
eval(l3,[a=0.1,b=1])],u=0..2*Pi,v=-1..1):
q2:=spacecurve([eval(l1,[a=0.1,b=1,v=0]),eval(l2,[a=0.1,b=1,v=0]),
eval(l3,[a=0.1,b=1,v=0])],u=0..2*Pi,color=red,thickness=4):
display([q1,q2]);
```

Фиг. 1 показва, че всъщност се използва част от сферата. Фиг. 2 се получава когато коефициентът a е близко до 0, стойност, за която се получава Фиг. 1. При Фиг. 2 се наблюдава вече известно усукване (горе).

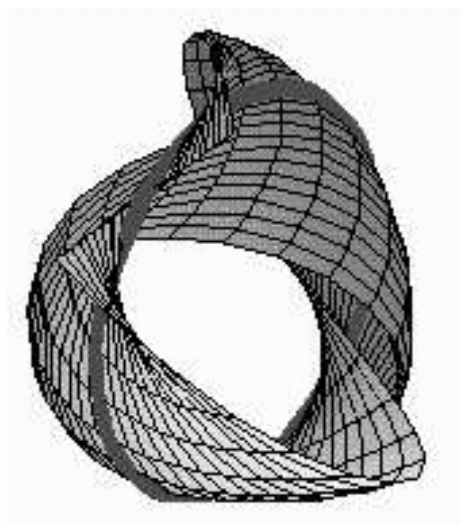


Фиг. 2

```

r1:=plot3d([eval(l1,[a=0.5,b=1]),eval(l2,[a=0.5,b=1]),
eval(l3,[a=0.5,b=1])),u=0..2*Pi,v=-1..1):
r2:=spacecurve([eval(l1,[a=0.5,b=1,v=0]),eval(l2,[a=0.5,b=1,v=0]),
eval(l3,[a=0.5,b=1,v=0])),u=0..2*Pi,color=red,thickness=4):
display([r1,r2]);

```

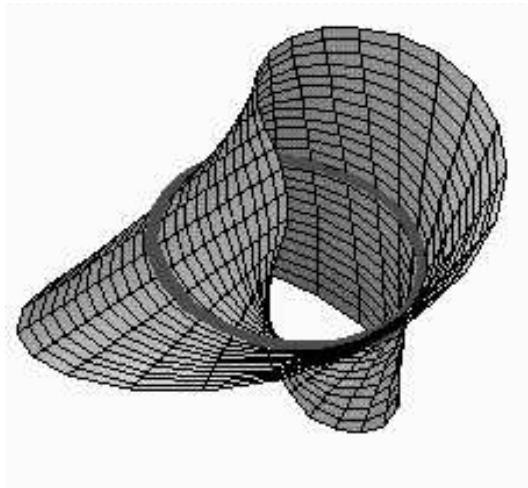


Фиг. 3

```

s1:=plot3d([eval(l1,[a=1,b=1]),eval(l2,[a=1,b=1]),
eval(l3,[a=1,b=1])),u=0..2*Pi,v=-1..1):
s2:=spacecurve([eval(l1,[a=1,b=1,v=0]),eval(l2,[a=1,b=1,v=0]),
eval(l3,[a=1,b=1,v=0])),u=0..2*Pi,color=red,thickness=4):
display([s1,s2]);

```



Фиг. 4

```

u1:=plot3d([eval(l1,[a=1,b=0]),eval(l2,[a=1,b=0]),eval(l3,[a=1,b=0])),
u=0..2*Pi,v=-1..1):
u2:=spacecurve([eval(l1,[a=1,b=0,v=0]),eval(l2,[a=1,b=0,v=0]),
eval(l3,[a=1,b=0,v=0])),u=0..2*Pi,color=red,thickness=4):
u3:=spacecurve([eval(l1+k*N1,[a=1,b=0,v=0,u=0]),eval(l2+k*N2,
[a=1,b=0,v=0,u=0]),eval(l3+k*N3,[a=1,b=0,v=0,u=0])),k=0..0.5,color=blue,
thickness=3):
u4:=spacecurve([eval(l1+k*N1,[a=1,b=0,v=0,u=2*Pi]),eval(l2+k*N2,
[a=1,b=0,v=0,u=2*Pi]),eval(l3+k*N3,[a=1,b=0,v=0,u=2*Pi])),k=0..0.5,
color=black,thickness=3):display([u1,u2,u3,u4]);

```

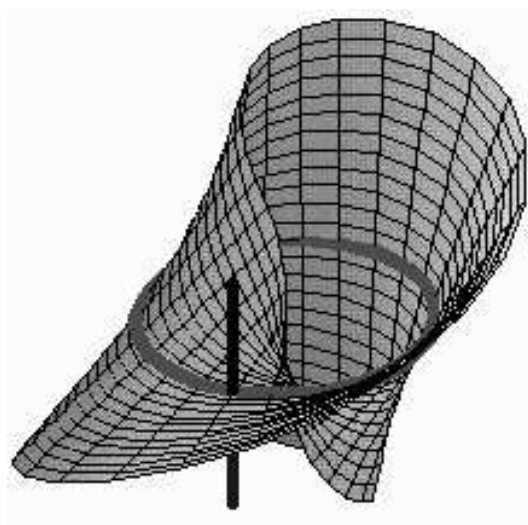
Със следната програма може да се намери кривината и торзията на централната линия.

```

kappa:=simplify(Curvature(<eval(l1,[v=0]),eval(l2,[v=0]),eval(l3,[v=0])>,
u));
tau:=simplify(Torsion(<eval(l1,[v=0]),eval(l2,[v=0]),eval(l3,[v=0])>,u));

```

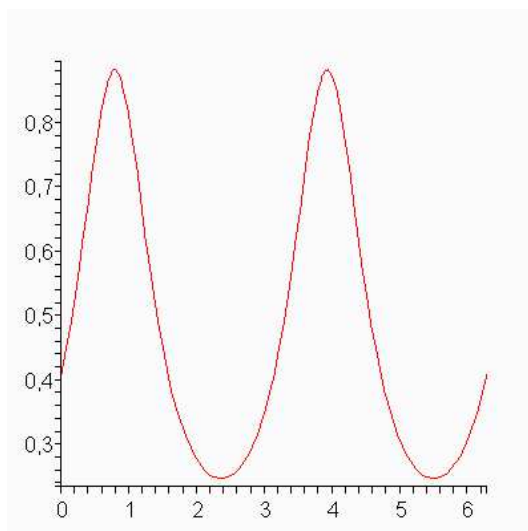
$$\kappa = \frac{\sqrt{a^4 + b^4 + a^2 b^2}}{(a^2 + b^2 - 2ab \sin u \cos u)^{3/2}}, \quad \tau = 0$$



Фиг. 5

Графиката на кривината се дава съгласно програмата

```
plot(eval(kappa,[a=2,b=1]),u=0..2*Pi);plot(eval(diff(kappa,u),[a=2,b=1]),  
u=0..2*Pi);
```



Фиг. 6

Решаването на уравнението

```
solve({diff(kappa,u)=0},{u});
```

определя стойностите $\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}$, за които се получават екстремалните стойности на кривината. Следва, че централната линия е елипса (в частност окръжност когато едно от числата a, b е равно на 0).

Като се използват въведените програми може да се намерят коефициентите на първата основна форма на повърхнината $S(a, b)$, нормалното векторно поле и неговите координати. Ето програмите за това, където

```
g11:=simplify(DotProduct(diff(1,u),diff(1,u)));
g12:=simplify(DotProduct(diff(1,u),diff(1,v)));
g21:=g12;
g22:=simplify(DotProduct(diff(1,v),diff(1,v)));
g:=simplify(g11*g22-g12*g21);
N:=simplify(CrossProduct(diff(1,u),diff(1,v))/sqrt(g));>
N1:=DotProduct(N,e1);N2:=DotProduct(N,e2);N3:=DotProduct(N,e3);
```

където

```
e1:=<1,0,0>;e2:=<0,1,0>;e3:=<0,0,1>;
```

Установяването на резултатите

```
eval(1,[v=0,u=0]);eval(1,[v=0,u=2*Pi]);
```

$$ae_x + be_z \quad ae_x + be_z$$

```
eval(N,[v=0,u=0]);eval(N,[v=0,u=2*Pi]);
```

$$-\frac{a^2\sqrt{4}}{2\sqrt{a^4}}e_z \quad \frac{a^2\sqrt{4}}{2\sqrt{a^4}}e_z$$

ни дава възможност да формулираме следната класификационна

Теорема. За всяко $a \neq 0$ повърхнината $S(a, b)$ е неориентируема (едностранна). При $a = 0$ тя е сферата, следователно е ориентируема (двустранна).

На фиг. 5 е начертана нормалата (в по-светло, насочена “нагоре”) в точката $u = 0$, която след завъртане по централната линия на $u = 2\pi$ заема положението на противоположната нормала (в по-тъмно, насочена “надолу”), съгласно установения факт непосредствено преди формулировката на теоремата.

В заключение ще формулираме възможностите, които ни дава компютърната система Maple при преподаване и провеждане на научни изследвания в диференциалната геометрия:

1. Начертане графиката на всяка линия в равнината или пространството. Пресмятане на кривината, торзията както и триедъра (двудъра) на Френе за линия. Намиране параметрични уравнения на линия при дадени нейни естествени уравнения (за пространствена линия когато отношението на торзията и кривината е постоянно).

2. Визуализация на всяка повърхнина в пространството. Намиране на особените ѝ точки. Пресмятане коефициентите на двете основни форми на повърхнината, коефициентите на изображението на Вайнгартен, гаусовата и средна кривина на повърхнина, намиране на асимптотични линии, линии на кривината, геодезични линии, намиране на лице на област върху повърхнина.
3. Анимации на еднопараметрични семейства от криви и повърхнини, както и анимации на триедъра (двудъра) на Френе, анимации на триедъра на Гаус (Дарбу) върху повърхнина (по-добре с JAWA VIEW)

Грозьо Станилов
Факултет по математика и информатика
бул. Дж. Баучер № 5
1164 София, България
e-mail: stanilov@fmi.uni-sofia.bg

Славка К. Славова
Педагогически колеж Добрич
к. Добротица 12
93000 Добрич, България
e-mail: slavova@dobrich.net

COMPUTER METHODS FOR EDUCATION AND INVESTIGATION IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

Grozio I. Stanilov, Slavka K. Slavova

In the paper we demonstrate the use of system *Maple* considering the family of surface $S(a, b)$ – a linear combination of a Möbius strip and a part of a sphere. The main result is the classification theorem of this family. All these surfaces are nonorientable if $a \neq 0$.