

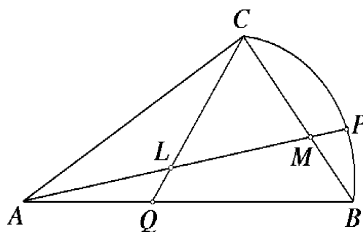
ВРЪЗКИ МЕЖДУ ОТНОШЕНИЯ НА ДЪГИ И ОТСЕЧКИ

Владимир Т. Тодоров, Михаил М. Константинов, Петър В. Стоев

В тази бележка е предложен метод за пресмятане на отношения по дадени пропорции в дъги и (или) отсечки. Ще отбележим, че такива задачи (според нас) не се разглеждат достатъчно добре в нашите средни училища. Като следствия се получават разнообразни (понякога известни) резултати. Като пример е получен аналог на теоремата на Чева за описана окръжност.

Започваме с една добре известна задача, която по наше мнение би трябвало да е част от “теорията” в раздела за пропорции във всеки учебник за средното училище.

1. Задача. Даден е триъгълник ABC , страните CB и BA на който се разделят от точките M и Q , дадени отношения λ и μ ($\frac{CM}{MB} = \lambda$ и $\frac{BQ}{QA} = \mu$). Да се пресметнат отношенията, в които пресечната точка L на AM и CQ дели тези отсечки. Например на колко е равно отношението $\frac{CL}{LQ}$?



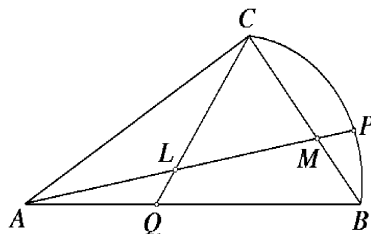
Несложното решение на тази задача се получава посредством стандартно прилагане на теоремата на Талес: *всички* отношения – дадените и търсеното се пренасят върху една права. След това се получава несложна алгебрична система, чието решение дава желанния отговор.

За да направим това в нашия случай е достатъчно да прекараме през Q правата QK ($K \in CB$), успоредна на AM . Това позволява да прехвърлим посредством теоремата на Талес всички отношения върху отсечката CB . Наистина, от горната рисунка се вижда, че $\lambda = \frac{CM}{MB} = \frac{u}{v+w}$, $\mu = \frac{BQ}{QA} = \frac{w}{v}$ и търсеното отношение $\frac{CL}{LQ} = \frac{u}{v}$.

И така, дадено е, че $\frac{u}{v+w} = \lambda$, $\frac{w}{v} = \mu$ и се търси $\frac{u}{v}$. Разбира се, това се решава тривиално: $w = \mu v$ и значи $\frac{CL}{LQ} = \frac{u}{v} = \lambda(1 + \mu)$.

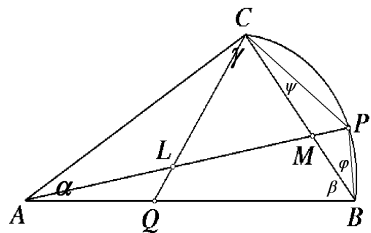
Ще отбележим, че от тази задача като тривиални следствия се получават множество класически факти, които за съжаление в доста учебни пособия се разглеждат като отделни “теореме”. Става дума за медианите, за ъглополовящите и други забележителни прави в триъгълника. Едно пряко следствие например е, че ъглополовящата през върха A на $\triangle ABC$ се дели от центъра на вписаната окръжност в отношение $\frac{b+c}{a}$ (означенията са стандартни).

2. Нека сега в предходната задача заменим страната BC с дъга от някаква окръжност. Казано по-точно, да разгледаме дъгата $\widehat{CB}$, която за има мярка 2δ (радиана) и хорда CB .



И така, нека ъглите при върховете A , B и C на триъгълника ABC са α , β и γ и нека на BC като хорда е построена (извън ABC) дъгата $\widehat{CB}$ с мярка 2δ . Точките P и Q лежат съответно на $\widehat{CB}$ и BA , като за мерките на дъгите имаме $\frac{\widehat{CP}}{\widehat{PB}} = t$ и съответно $\frac{BQ}{QA} = \mu$. Ако L е пресечната точка на AP и CQ , то трябва да се пресметне $\frac{CL}{LQ}$.

Нека M е пресечната точка на AP и CQ . Ясно е, че за да решим **2.** достатъчно е да пресметнем отношението $\lambda = \frac{CM}{MB}$, което ще разглеждаме като първото подусловие в горната задача. За тази цел построяваме триъгълника CPB и нека φ и ψ са ъглите при съответните върхове, както е показано на следващата рисунка.



Ясно е, че $\varphi + \psi = \delta$ и $\frac{\varphi}{\psi} = t$ и значи можем да изразим тези ъгли чрез дадените ъгъл δ и отношение t . Поради тази причина в следващия текст ще работим с ъглите φ и ψ ; разбира се, в окончателния резултат ще участват дадените в условието

величини.

И така, да отбележим като начало, че $\frac{CM}{MB} = \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle AMB}}$, защото съответните триъгълници имат общ връх и основи CM и MB . Нека след това $\angle MAB = \alpha_1$ и $\angle MAC = \alpha_2$. Имаме след това $\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle AMB}} = \frac{b \sin \alpha_2}{c \sin \alpha_1}$, защото $\frac{1}{2}AM$ се съкращава във формулата за лице на триъгълник (да напомним, че използваме стандартните за геометрията на триъгълника означения – например с b сме означили страната AC).

За да се “свържат” отношенията между дължини на дъги и отсечки остава да забележим, че от друга страна

$$\frac{b \sin \alpha_2}{c \sin \alpha_1} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot b \sin \alpha_2}{\frac{1}{2}AP \cdot c \sin \alpha_1} = \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle APB}}.$$

Но очевидно

$$\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle APB}} = \frac{\frac{1}{2}b \cdot CP \sin(\gamma + \psi)}{\frac{1}{2}c \cdot BP \sin(\beta + \varphi)} = \frac{b \cdot CP \sin(\gamma + \psi)}{c \cdot BP \sin(\beta + \varphi)}.$$

И така, $\frac{CM}{MB} = \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle AMB}} = \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle APB}} = \frac{b \cdot CP \sin(\gamma + \psi)}{c \cdot BP \sin(\beta + \varphi)}$, при което “неизвестни” остават отношенията $\frac{b}{c}$ и $\frac{BP}{CP}$. Те се изразяват от синусовата теорема, приложена за съответните триъгълници. Имаме последователно $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, значи $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$; аналогично получаваме, че $\frac{BP}{CP} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$.

И така, за отношението $\lambda = \frac{CM}{MB}$ се получава

$$(r) \quad \lambda = \frac{\sin \beta \sin \varphi \sin(\gamma + \psi)}{\sin \gamma \sin \psi \sin(\beta + \varphi)}.$$

След като изразим φ и ψ посредством δ и t получаваме следния израз:

$$(rt) \quad \lambda = \frac{CM}{MB} = \frac{\sin \beta \sin \frac{t\delta}{1+t} \sin \left(\gamma + \frac{\delta}{1+t} \right)}{\sin \gamma \sin \frac{\delta}{1+t} \sin \left(\beta + \frac{t\delta}{1+t} \right)}.$$

В следващия текст ще използваме и двете формули; би могло даже да се каже, че (r) в доста случаи е по-удобна за решаване на различни задачи. Да напишем все пак окончателния отговор на 2. След като използваме Задача 1., виждаме, че

$$\frac{CL}{LQ} = (1 + \mu) \frac{\sin \beta \sin \frac{t\delta}{1+t} \sin \left(\gamma + \frac{\delta}{1+t} \right)}{\sin \gamma \sin \frac{\delta}{1+t} \sin \left(\beta + \frac{t\delta}{1+t} \right)}.$$

2.1. Различни интересни приложения се получават, когато $\widehat{BC}$ е дъга от описа-

ната около $\triangle ABC$ окръжност. В този случай $\delta = \alpha$ и $\psi = \alpha - \varphi$. Значи $\sin(\gamma + \psi) = \sin(\gamma + \alpha - \varphi) = \sin(\pi - \beta - \varphi) = \sin(\beta + \varphi)$. Тогава $\lambda = \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\sin \gamma \sin \psi} = \frac{\sin \beta \sin \frac{t\alpha}{1+t}}{\sin \gamma \sin \frac{\alpha}{1+t}}$.

Ако например $t = \mu = 1$, то получаваме, че ъглополовящата през A дели медианата през C в отношение $\lambda = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$. При $t = \mu = 2$ се получава $\frac{CL}{LQ} = 6 \cos \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ и т.н.

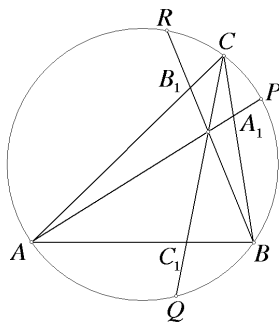
Ако пък $\lambda = 1$, получаваме, че медианата през върха A дели дъгата $\widehat{BC} = 2\alpha$ на описаната окръжност на дъги 2φ и 2ψ , за които $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$. Разбира се, може да се съставят разнообразни задачи и в тази посока.

2.2. Да допуснем, че $\triangle ABC$ е остроъгълнен и L е центърът на описаната около него окръжност. Тогава $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ и $\psi = \frac{\pi}{2} - \gamma$ (защото AP е диаметър). От това следва, че $\lambda = \frac{CM}{MB} = \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \gamma \cos \gamma} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma}$. Последното равенство означава, че M е център на тежестта на материалните точки B с маса $\sin 2\beta$ и C с маса $\sin 2\gamma$. От тук с аналогични разсъждения получаваме добре известния факт, че центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е център на тежестта на материалните точки A , B и C с маси съответно $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$ и $\sin 2\gamma$. Като следствие получаваме, че $\frac{AL}{LM} = \frac{\sin 2\beta + \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}$.

Да отбележим, че горните разсъждения остават в сила и когато точката P лежи на продължението на дъгата $\widehat{BC}$, а също така и когато Q лежи на правата AB . Разсъжденията остават на практика непроменени; трябва само да се има пред вид, че тогава отношенията могат да бъдат *отрицателни* (тоест трябва да се разглеждат алгебрични мерки, което не се разглежда в средното училище).

3. Приложенията на горните примери са многобройни и тази работа няма за цел да ги излага в детайли. Ще покажем все пак как изглежда аналога на теоремата на Чева за описана окръжност.

3.1 Нека P , Q и R са точки от дъгите $\widehat{CB}$, $\widehat{BA}$ и $\widehat{AC}$. Да допуснем освен това, че $\frac{\widehat{CP}}{\widehat{PB}} = \lambda$, $\frac{\widehat{BQ}}{\widehat{QA}} = \mu$ и $\frac{\widehat{AR}}{\widehat{RC}} = \nu$. Ще изследваме при какви условия за отношенията λ , μ и ν правите AP , CQ и BR се пресичат в една точка.



Както се вижда от горната рисунка, за да се реши тази задача е достатъчно да пресметнем отношенията $\lambda_1 = \frac{CA_1}{A_1B}$, $\mu_1 = \frac{BC_1}{C_1A}$ и $\nu_1 = \frac{AB_1}{B_1C}$ и да използваме теоремата на Чева за последните отношения.

Разбира се, това следва от **2.1**: $\lambda_1 = \frac{\sin \beta \sin \frac{\lambda \alpha}{1+\lambda}}{\sin \gamma \sin \frac{\alpha}{1+\lambda}}$, $\mu_1 = \frac{\sin \alpha \sin \frac{\mu \gamma}{1+\mu}}{\sin \beta \sin \frac{\gamma}{1+\mu}}$ и $\nu_1 = \frac{\sin \gamma \sin \frac{\nu \beta}{1+\nu}}{\sin \alpha \sin \frac{\beta}{1+\nu}}$. Тогава правите AP , BR и CQ се пресичат в една точка тогава и само

тогава, когато е изпълнено равенството

$$(ch) \quad \lambda_1 \mu_1 \nu_1 = \frac{\sin \frac{\lambda \alpha}{1+\lambda} \sin \frac{\mu \gamma}{1+\mu} \sin \frac{\nu \beta}{1+\nu}}{\sin \frac{\alpha}{1+\lambda} \sin \frac{\gamma}{1+\mu} \sin \frac{\beta}{1+\nu}} = 1.$$

3.2. Предлагаме на читателя да напише аналог на теоремата на Чева за произволен криволинеен триъгълник ABC със “страни” дъгите $\widehat{AB} = 2\delta_\gamma$, $\widehat{BC} = 2\delta_\alpha$ и $\widehat{CA} = 2\delta_\beta$.

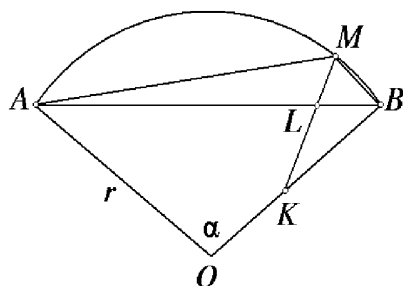
3.3. Ето още едно любопитно приложение на равенството **(r)**: Нека на всяка от страните AB , BC и CA на триъгълника ABC е построен съответно равнобедрения триъгълник ABC_1 , BA_1C и CAB_1 , всеки от които има ъгъл при основата равен съответно на φ_γ , φ_α и φ_β . При тези условия правите AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$\frac{\sin(\gamma + \varphi_\alpha) \sin(\beta + \varphi_\gamma) \sin(\alpha + \varphi_\beta)}{\sin(\beta + \varphi_\alpha) \sin(\alpha + \varphi_\gamma) \sin(\gamma + \varphi_\beta)} = 1.$$

3.4. В частния случай когато триъгълниците ABC_1 , BA_1C и CAB_1 са подобни ($\varphi_\gamma = \varphi_\alpha = \varphi_\beta$), то правите AA_1 , BB_1 и CC_1 винаги се пресичат в една точка. Същото се отнася и за някои неподобни равнобедрени триъгълници; например когато $\varphi_\gamma = \gamma$, $\varphi_\alpha = \alpha$ и $\varphi_\beta = \beta$.

Разбира се, може да съставят твърде много задачи, в които се “свързват” отношения между дъги и отсечки. Да отбележим в заключение, че тъкмо такава беше втората задача от неизтеглената тема II на приемния изпит в УАСТ за 2005 година, която предлагаме за решение на читателя:

Даден е кръгов сектор OAB с център O , централен ъгъл α и радиус r . Точка M лежи на дъгата $\widehat{AB}$, K лежи на OB и MK пресича хордата AB в точка L . Нека $\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} = \frac{1}{x}$, $\frac{OK}{KB} = \frac{1}{y}$ и $\frac{ML}{LK} = 2$.



а) Докажете, че

$$\widehat{MB} = \frac{\alpha x}{x+1}$$

и че $MB = 2r \sin \frac{\alpha x}{2(x+1)}$.

б) Изразете y като функция на x : $y = f(x)$.

в) При $\alpha = 60^\circ$ пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

В. Т. Тодоров, М. М. Константинов, П. В. Стоев

Катедра Математика

УАСГ, бул. Хр. Смирненски 1

1421 София, България

320

e-mail: vttp@yahoo.com; mm_fte@uacg.bg

RELATIONS BETWEEN PROPORTIONS IN ARCS AND SEGMENTS

Vladimir Todorov, Michail Konstantinov, Petar Stoev

In this note we offer a method for calculating proportions, suppose we have given ratios in an arc and a segment in a given triangle. For example, one may obtain an analogous to the theorem of Cheva for the circumscribed circle.