

## БАЗОВИ СЪБИТИЯ И ТЪЖДЕСТВА

Наталия Хр. Тончева

В работата се предлага ефективен и интересен начин за доказване на тъждества, чрез използване на апарата на базовите събития. Идеята е да се образуват равенства, като се използват две различни пълни групи базови събития за дадено случайно събитие  $A$ . Предложеният подход е удачен при извънкласни форми на обучение, както и при работа със студенти.

**1. Увод.** За яснота на изложението, ще приведем следните определения и твърдения. Доказателства на твърденията могат да се намерят в [1].

**Определение 1.** *Ще казваме, че  $A$  е благоприятстващо за  $B$  събитие ( $A \Rightarrow B$ ), ако от сбъдването на  $A$  следва сигурното сбъдване на  $B$ .*

**Определение 2.** *Ще казваме, че пълна група събития (ПГС),  $H_1, H_2, \dots, H_k, \dots$  е базова за събитието  $A$ , ако за всяко  $k = 1, 2, \dots$  е изпълнено едно от двете събития:  $H_k \Rightarrow A$  или  $H_k \Rightarrow \bar{A}$ .*

Особено внимание пред учащите се трябва да се отдели на факта, че не всяка ПГС е базова за дадено събитие. Тази особеност е една допълнителна мотивация за учениците да избират такива ПГС, с които ще решат дадена задача най-лесно. За да се илюстрират ПГС, които не са базови за дадено събитие, е добре да се дават и изискват от учениците подходящи контрапримери. Тук ще предложим един такъв пример: С  $\xi$  е означен броят на точките, които ще покаже подхвърлен зар. Една ПГС за този пример е  $H_1 = (\xi = 1), H_2 = (2 \leq \xi \leq 5), H_3 = (\xi = 6)$ . Тази ПГС е базова за събитието  $A = (\xi \leq 5)$ , но не е базова за събитието  $B = (\xi \leq 3)$ .

**Твърдение 1.** *Ако  $H_1, H_2, \dots, H_k, \dots$  е ПГС, базова за  $A$ , то  $P(A) = \sum_{\{i: H_i \Rightarrow A\}} P(H_i)$ , т.е. вероятността на дадено събитие е равна на сумата от вероятностите на всички благоприятстващи го събития от една ПГС, базова за това събитие.*

За учащите се е добре да се даде доказателство само за случая, когато ПГС е крайна, но да се използва и в случая, когато е безкрайна.

**Твърдение 2.** *Ако  $H_1, H_2, \dots, H_k, \dots$  и  $W_1, W_2, \dots, W_l, \dots$  са ПГС, базови за  $A$ , то*

$$(1) \quad P(A) = \sum_{\{i: H_i \Rightarrow A\}} P(H_i) = \sum_{\{j: W_j \Rightarrow A\}} P(W_j)$$

**Твърдение 3.** (Класическа формула за вероятност – КФВ) За всяка пълна група на равновъзможни събития (ПГС)  $H_1, H_2, \dots, H_N$  базова за  $A$  е изпълнено

$$(2) \quad P(A) = \frac{M(A)}{N},$$

където  $M(A)$  е броят на благоприятстващите  $A$  базови събития, а  $N$  е броят на всички базови събития.

**2. Същност на метода. Задачи.** Като използваме предложените определения и твърдения, можем да следваме следния алгоритъм за откриване на твърдества:

- I. За дадено случайно събитие  $A$  намираме две различни базови ПГС.
- II. Намираме вероятността на  $A$ , като ползваме първата ПГС.
- III. Намираме вероятността на  $A$ , като ползваме втората ПГС.
- IV. Изравняваме изразите от II и III.
- V. По необходимост преработваме твърдеството.

**Задача 1.** Изведете формулата за сумата от членовете на крайна геометрична прогресия, като използвате ПГС за следния пример: Стрелец, който разполага с  $n + 1$  патрона, стреля по цел до първо попадане в нея или до изчерпване на патроните. С  $\psi$  е означен броя на изстреляните патрони, а с  $p$  ( $0 < p < 1$ ) – вероятността стрелецът да улови целта с един патрон.

**Упътване:** Намерете вероятността на събитието  $A = (\psi \geq k)$  първо по “класическия начин”, а после, като ползвате ПГС –  $H_1 = (\psi = 1), H_2 = (\psi = 2), \dots, H_{n+1} = (\psi = n + 1)$ . Изравнете изразите.

**Решение.** С  $y_i$  ще означим събитието – “ $i$ -ти изстрел е успешен”.

С  $n_i$  ще означим събитието – “ $i$ -ти изстрел е неуспешен”, т.е.  $(\bar{y}_i)$ .

Нека  $q = P(\bar{y}_i) = 1 - p$ .

Тогава първо намираме търсената вероятност по “класическия начин”.

$$P(\psi \geq k) = P(n_1 n_2 \dots n_{k-1}) = P(n_1)P(n_2) \dots P(n_{k-1}) = q^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Намираме същата вероятност чрез предложената в упътването ПГС, като ползваме твърдение 1 и получаваме:

$$\begin{aligned} P(\psi \geq k) &= P(\psi = k) + P(\psi = k + 1) + \dots + P(\psi = n) + P(\psi = n + 1) = \\ &= P(n_1 n_2 \dots n_{k-1} y_k) + P(n_1 n_2 \dots n_k y_{k+1}) + \dots + P(n_1 n_2 \dots n_n y_{n+1}) + \\ &+ P(n_1 n_2 \dots n_{n+1}) = q^{k-1}p + q^k p + \dots + q^n p + q^{n+1} \end{aligned}$$

Приравняваме двата резултата и получаваме:

$$q^{k-1} = q^{k-1}p + q^k p + \dots + q^n p + q^{n+1}, \quad \text{за } k = 1$$

твърдеството добива вида:

$$1 = p + qp + \dots + q^n p + q^{n+1}$$

като вземем предвид, че  $p = 1 - q$ , получаваме:

$$(3) \quad 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

От (3) лесно се получава формулата за сумата от членовете на крайна геометрична прогресия:  $a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^n = a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

Задачата би могла да се реши и за случай, когато стрелецът има неизчерпаем брой патрони и “дълъг” живот. Ползвайки същата идея можем да получим формулата за безкрайна геометрична прогресия:  $a_1 + a_1q + \dots + a_1q^k + \dots = \frac{a_1}{1-q}$ .

**Задача 2.** Докажете, че

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

като използвате ПГС за следния пример: От урна, в която има  $n-1$  топки, номерирани с числата от 1 до  $n-1$ , а също и  $k+1$  неномерирани топки, последователно, без връщане се изваждат всички топки.

**Упътване:** Означаваме с  $\eta_i$  номера на изваждането на топката с номер  $i$ . Намерете  $P(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1})$  с помощта на базовата ПГРС –  $(\eta_{i_1} < \eta_{i_2} < \dots < \eta_{i_{k+1}})$ , за всички пермутации  $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$  на числата  $1, 2, \dots, k+1$  и на ПГС –  $(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1} = i+k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1})$ .

**Решение.** Първата ПГС се състои от общо  $(k+1)!$  различни, равновъзможни събития. Като използваме КФВ, получаваме, че

$$(4) \quad P(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1}) = P(\eta_{i_1} < \eta_{i_2} < \dots < \eta_{i_{k+1}}) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Според предложението по-горе алгоритъм, ще трябва да намерим същата вероятност, но с помощта на втората ПГС. За целта ще трябва да намерим  $P(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1} = k+i)$ . Ще разглеждаме растящи  $(k+1)$ -торки, съставени от числата  $1, 2, \dots, k+i$ , в които последното число е фиксирано  $k+i$ . По този начин можем да съпоставим на всяко благоприятстващо за  $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1} = k+i$  елементарно събитие, взаимно-еднозначно строго растяща  $k$ -торка, съставена от числата  $1, 2, \dots, k+i-1$ .

От друга страна, на всяко елементарно събитие, взаимно-еднозначно може да се съпостави  $k+1$ -торка, съставена от числата  $1, 2, \dots, n+k$  по  $V_{n+k}^{k+1}$  начина.

От тук, с помощта на втората ПГС, твърдение 1 и [2] можем да намерим, че

$$(5) \quad P(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1}) = \sum_{i=1}^n P(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{k+1} = k+i) = \sum_{i=1}^n \frac{C_{k+i-1}^k}{V_{n+k}^{k+1}}.$$

От (4), (5) и твърдение 2 получаваме, че  $\frac{1}{(k+1)!} = \sum_{i=1}^n \frac{C_{k+i-1}^k}{V_{n+k}^{k+1}}$ . Като преработим това твърдение, ще получим:

$$(6) \quad \frac{n(n+1) \dots (n+k)}{k+1} = \sum_{i=1}^n i(i+1) \dots [i+(k-1)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

За  $k = 1$  твърдение (6) добива вида:  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .

За  $k = 2$  твърдение (6) добива вида:  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \sum_{i=1}^n i(i+1)$ , откъдето

получаваме, че  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i$ . Като използваме вече полученото

тържество, получаваме:  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

За  $k = 3$  от тържество (6) можем да получим:  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

**Задача 3.** В урна има по  $a_i$  топки с номер  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $d$  неномерирани топки. Всички се изваждат последователно, без връщане. С  $\eta_i$  е означен номерът на изваждането, когато за първи път ще се появи топка с номер  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Докажете, че:

$$(7) \quad P(\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n) = \frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_2 + a_3 + \dots + a_n) \dots (a_n + a_n)}$$

*Упътване:* Разгледайте случая  $n = 2$ . Използвайте базовите ПГС – ( $\eta_1 < \eta_2$ ) и ( $\eta_1 > \eta_2$ ) и  $H_0, H_1, \dots, H_{d+1}$ , където  $H_0$  означава, че първата поява на номерирана топка няма да е с номер 1, а  $H_i$  означава, че първата номерирана топка ще се появи при  $i$ -тото вадене и тя ще е с номер 1.

**Решение.** При  $n = 2$  имаме топки с номера 1, 2 и без номера. За да намерим вероятността да се появи първо топка с номер 1, ще използваме твърдение 1. По този начин получаваме:

$$\begin{aligned} P(\eta_1 < \eta_2) &= \sum_{i=1}^{d+1} P(H_i) = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{V_d^{i-1} a_1}{V_{a_1+a_2+d}^i} = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{V_d^{i-1} a_1}{V_{a_1+a_2+d}^i} \cdot \frac{a_2}{a_2} \\ &= P(\eta_1 > \eta_2) \frac{a_1}{a_2} = [1 - P(\eta_1 < \eta_2)] \frac{a_1}{a_2}, \end{aligned}$$

откъдето получаваме  $P(\eta_1 < \eta_2) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{V_d^{i-1} a_1}{V_{a_1+a_2+d}^i}$ . Тогава

$$(8) \quad \frac{1}{a_1 + a_2} = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{V_d^{i-1}}{V_{a_1+a_2+d}^i}, \quad a_1 = 1, 2, \dots, \quad a_2 = 1, 2, \dots, \quad d = 0, 1, 2, \dots$$

Като положим  $k = a_1 + a_2$  получаваме:

$$(9) \quad \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{V_d^{i-1}}{V_{a_1+a_2+d}^i}, \quad k = 2, 3, \dots \quad d = 0, 1, 2, \dots$$

При  $n = 3$ , като използваме формулата за пълната вероятност получаваме:

$$P(\eta_1 < \eta_2 < \eta_3) = \sum_{i=1}^{d+1} P(H_i) P(\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 / H_i) = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{V_d^{i-1} a_1}{V_{a_1+a_2+a_3+d}^i} P(\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 / H_i).$$

Условната вероятност  $P(\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 / H_i)$  е равна на вероятността на събитието – преди първата поява на топка с номер 2 са се появявали само топки с номер 1 или неномерирани топки, като неномерирани топки са  $d - i + 1$  на брой, а топките с номер 1 са  $a_1 - i$ . Ползвайки идеята от случая за  $n = 2$  получаваме  $P(\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 / H_i) = \frac{a_1 - i}{a_1 - i + d - i + 1} = \frac{a_1 - i}{a_1 + d - 2i + 1}$ .

$\eta_3/H_i) = \frac{a_2}{a_2 + a_3}$  и като приложим (9), получаваме:

$$P(\eta_1 < \eta_2 < \eta_3) = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{V_d^{i-1} a_1}{V_{a_1+a_2+a_3+d}^i} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3} = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3}.$$

Чрез използването на метода на математическата индукция се стига до резултата от (7).

**Задача 4.** Докажете, че  $aC_{2a-1}^{a-1} = \sum_{i=1}^a i(C_a^i)^2$ , като използвате ПГС за следния пример: Имаме две урни. В първа урна има  $a$  бели и  $a$  черни топки. Случайно избрани  $a$  топки от първата урна се прехвърлят във втората (празна) урна.  $C\xi_i$  означаваме броя на извадените бели топки от  $i$ -тата урна ( $i = 1, 2$ ).

Упътване: Намерете  $P(\xi_2 = 1)$  първо с помощта на КФВ за базовата ПГС –  $(\xi_2 = 0)$ ,  $(\xi_2 = 1)$ , а после с помощта на твърдение 1 и базовите ПГС –  $(\xi_1 = k, \xi_2 = 1)$ ,  $(\xi_1 = k, \xi_2 = 0)$  за  $k = 0, 1, 2, \dots, a$ .

**4. Приложение.** Предложеният метод изисква значителни усилия от страна на преподавателя и достатъчна мотивация, аналитични умения и солидна подготовка от страна на учащите се. Тези труднодостижими изисквания за българското средно училище отделят място на метода само при работа с изявени ученици или студенти.

При излагането на метода е добре да се състави система от задачи, започваща със значително по-прости от предложените тук примери.

При конструиране на примери трябва да се има предвид, че ако за даден опит, пространството на елементарните събития се състои от  $n$  елементарни събития, то всички елементарни събития са  $2^n - 1$  на брой и за всяко от тях могат да се намерят достатъчно на брой ПГС. Ако за някое събитие  $A$  се намерят  $k$  различни ПГС, то чрез намирането на  $P(A)$  могат да се изведат  $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$  твърдения.

При успешно усвояване на метода могат да се достигнат значителни резултати в развитието на творческото мислене на учащите се. При особено добри резултати е подходящо учениците да се оставят да съставят подобни примери самостоятелно и да откриват нови твърдения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хр. Вълчев, Н. Тончева. Място на класическата формула за вероятност в училищния курс по математика, *Математика и математическо образование*, София, 2004, 306–310.
- [2] Хр. Вълчев, Н. Тончева. Приложение на съответствията при преброяване на елементите на крайни множества, *Юбилейна конференция с международно участие*, Варна, 2005 (под печат).

Наталия Х. Тончева  
 Шуменски университет “Еп. К. Преславски”  
 9712 Шумен, България  
 e-mail: Natalia\_1@abv.bg

## **BASIC EVENTS AND IDENTITIES**

**Nataliya H. Toncheva**

In the paper is offered an effective and interesting way to prove identities by using the theory of basic events. The idea is to construct equations by using two different full groups of events, which are basic for a random event  $A$ . The offered approach is useful in out of class forms of education in school and for University education.