МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007

КАНОНИЗИРАНЕ НА КРИВИ ЛИНИИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН С КОМПЮТЪРНИ СРЕДСТВА

Грозьо И. Станилов, Славка К. Славова

Прилагаме компютърната програма MAPLE за канонизиране на неизродени криви линии от втора степен. Даваме два пакета-програми за канонизиране съответно на централни (елипси, хиперболи) и нецентрални криви (параболи). Направени са две демонстрации с тях.

Една традиционна задача за студенти по математични дисциплини за всички вузове, както е известно, е следната:

Дадена е крива линия от втора степен спрямо някаква координатна система. Да се намери каноничното ѝ уравнение, както и последователните координатни трансформации, чрез които се стига до него. Да се начертае кривата линия, както и трите координатни системи.

Тази задача се дава обикновено в края на курса, съдържащ аналитична геометрия, тъй като за нейното решаване се привлича доста обемист материал от тази дисциплина. Нашият опит показва, че нейното решаване затруднява студентите.

Поради тази причина, а и за да демонстрираме възможности на компютърните средства, ние се заехме с нейното решаване, като използвахме компютърната алгебра на MAPLE.

Известно е, че с класически средства при централните и нецентралните криви линии се постъпва в различен ред. Така ще постъпим и ние.

Нека кривата линия от втора степен има спрямо ортонормираната координатна система Oxy (или $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$) следното уравнение

(1) $$F(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Канонизиране на централна крива. Ще припомним някои факти от аналитичната геометрия. Център на крива от втора степен е точка $M_0(x_0, y_0)$, спрямо която кривата е симетрична. Координатите на центъра удовлетворяват следната система:

(2) $$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

Тази система има решение, когато

(3) $$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0.$$

Тогава кривата се нарича централна, и нейното централно уравнение е

(4) $$a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + F(x_0, y_0) = 0.$$

Централното уравнение на кривата е спрямо координатната система $M_0x_1y_1$ (или $M_0\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$), получена от първата координатна система Oxy чрез транслацията $Oxy \to M_0x_1y_1$:

$$x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1. \tag{5}$$

По-нататък се прави ротация на втората координатна система $M_0x_1y_1$ до положение на третата координатна система M_0XY (или $M_0\overrightarrow{f_1}\overrightarrow{f_2}$), определена по следния начин:

Решава се характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-s \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad s^2 - (a_{11}+a_{22})s + A_{33} = 0. \tag{6}$$

Поради условието (3), неговите корени s_1, s_2 са различни. Взема се първия корен и се решава системата

$$(a_{11} - s_1)p_1 + a_{12}p_2 = 0, p_1^2 + p_2^2 = 1, \tag{7}$$

с което се намира вектора $\overrightarrow{f_1}(p_1, p_2)$. Веднага се намира и вектора $\overrightarrow{f_2}(-p_2, p_1)$. Тогава се прави ротацията $M_0x_1y_1 \to M_0XY$, определена с формулите

$$x_1 = Xp_1 - Yp_2, y_1 = Xp_2 + Yp_1. \tag{8}$$

В резултат на това се получава каноничното уравнение на кривата:

$$s_1X^2 + s_2Y^2 + F(x_0, y_0) = 0. \tag{9}$$

Пример 1. Означаваме (с печатния текст е дадена програмата за изпълнение на задачата)

```
F:=a11*x^2+a22*y^2+2*a12*x*y+2*a13*x+2*a23*y+a33;
```

Нека

```
a11:=5; a22:=2; a12:=2; a13:=-12; a23:=-6; a33:=18;
```

$$a_{11} := 5,\ a_{22} := 2,\ a_{12} := 2,\ a_{13} := -12,\ a_{33} := 18$$

Имаме

```
s1:= simplify(1/2*a11+1/2*a22+1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2));
s2:= simplify(1/2*a11+1/2*a22-1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2));
```

$$s_1 := 6,\ s_2 := 1$$

```
p1:= simplify(2/(8*a12^2+2*a11^2-4*a11*a22-2*a11*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+
4*a12^2)^(1/2)+2*a22^2+2*a22*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+
4*a12^2)^(1/2))^(1/2)*a12);
p2:= simplify(-2*(1/2*a11-1/2*a22-1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)
^(1/2))/(8*a12\2+2*a11^2-4*a11*a22-2*a11*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)
^(1/2)+2*a22\ 2+2*a22*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2))^(1/2));
```

$$p_1 := \frac{2\sqrt{5}}{5},\ \ p_2 := \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Координатите на центъра:

```
y0:= -(-a11*a23+a12*a13)/(-a11*a22+a12^2);
x0:= -(a12*a23-a13*a22)/(-a11*a22+a12^2);
```

$$y_0 := 1,\, x_0 := 2$$

Пресмятаме:

```
k:=eval(F,[x=x0,y=y0]);
```

Транслацията е :

```
x=x0+x1;y=y0+y1;
```

За чертане използваме програмата:

```
with(plots):
t1:=textplot([-0.1,-0.2,O],align={LEFT,DOWN},color=red):
t2:=textplot([x0-0.2,y0+0.2,MO],align={LEFT},color=green,thickness=3):
t3:=plot([t,0,t=-1..4.5],thickness=1):
t4:=plot([0,t,t=-1..4],thickness=1):
t5:=plot([x0+t,y0,t=-1..4],thickness=2,color=green):
t6:=plot([x0,y0+t,t=-1..3],color=green,thickness=2):
t7:=plot([x0+p1*t,y0+p2*t,t=-2..4],color=blue,thickness=2):
t8:=plot([x0-p2*t,y0+p1*t,t=-4..4.5],color=blue,thickness=2):
t9:=implicitplot(F=0,x=-1..4,y=-4..4.5,color=red,thickness=2):
t10:=textplot([4+0.2,-0.1,x],align={DOWN},color=red):
t11:=textplot([-0.2,3.8,y],color=red,align={DOWN}):
t12:=textplot([x0+1+1.5,y0-0.1,x1],color=green,align={DOWN}):
t13:=textplot([x0-0.2,y0+1+2,y1],color=green,align={DOWN}):
t14:=textplot([x0+p1+1.5,y0+p2+0.5,X],color=blue,align={DOWN}:
t15:=textplot([x0-p2-0.9,y0+p1+2.5,Y],color=blue,align={DOWN}):
display([t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15]);
```

Ротацията е:

```
x1:=simplify(p1*X-p2*Y);y1:=simplify(p2*X+p1*Y);
```

Каноничното уравнение е:

`K:=s1*X^2+s2*Y^2+eval(F,[x=x0,y=y0])=0;` $K := 6X^2 + Y^2 - 12 = 0$

Канонизиране на нецентрална крива. Кривата е нецентрална, когато системата (2) няма решение. Следва, че $A_{33} = 0$. Тогава решаваме уравнението (6)

`solve({s^2-(a11+a22)*s=0}, {s});` $\{s = 0\},\ \{s = a_{11} + a_{12}\}$

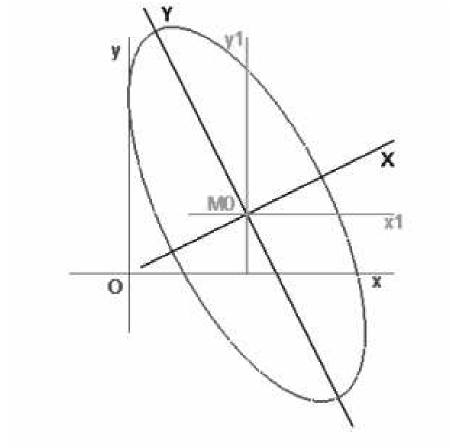
`s1:= 0; s2:= a11+a22;` $s_1 := 0,\, s_2 := a_{11} + a_{22}$

Намираме

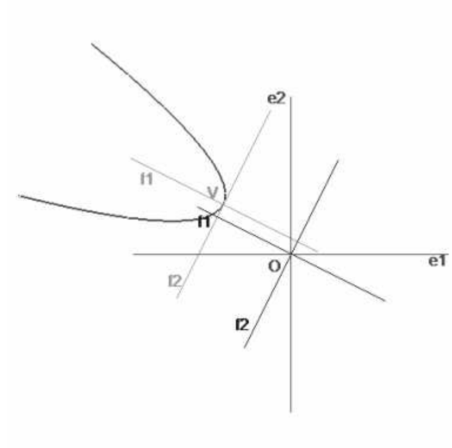
```
p2:=(1/sqrt(a12^2+a11^2))*a11; p1:=-a12*1/sqrt(a11^2+a12^2);
```

$$p_2 := \frac{a_{11}}{a_{12}^2 + a_{11}^2},\ \ p_1 := -\frac{a_{12}}{a_{12}^2 + a_{11}^2}$$

Като направим ротацията



Фиг. 1



Фиг.2

```
x:=x1*p1-y1*p2;y:=x1*p2+y1*p1;
```

$$x := -\frac{x_1 a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{y_1 a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}}, \quad y := -\frac{x_1 a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{y_1 a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}}$$

уравнението на кривата приема вида

```
F:=s2*y1^2+2*a13*x+2*a23*y+a33;
```

или

$$F := (a_{11}+a_{22})y_1^2 + 2a_{13}\left(-\frac{x_1 a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{y_1 a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}}\right)$$

$$+2a_{23}\left(\frac{x_1 a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{y_1 a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}}\right) + a_{33}.$$

Извършваме транслацията

```
x1:=X+a; y1:=Y+b;
```

Тогава за F получаваме

```
f:=expand(eval(F,[x1=X+a,y1=Y+b]));
```

$$f := a_{11}Y^2 + 2a_{11}Yb + a_{11}b^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{22}Yb + a_{22}b^2 - \frac{2a_{13}a_{12}X}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{2a_{13}a_{12}a}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} -$$

$$\frac{2a_{13}a_{12}Y}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{2a_{13}a_{12}X}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} + \frac{2a_{23}a_{11}X}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} + \frac{2a_{23}a_{11}a}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{2a_{23}a_{12}Y}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} - \frac{2a_{23}a_{12}b}{\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}} + a_{33}$$

Означаваме коефициентите при Y и свободния член съответно с:

```
k1:=2*a11*b+2*a22*b-2/(a12^2+a11^2)^(1/2)*a13*a11-2/(a12^2+
a11^2)^(1/2)*a23*a12;
```

$$k_1 := 2a_{11}b^2 + 2a_{22}b - \frac{2a_{13}a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}} - \frac{2a_{23}a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}}$$

```
k2:=a11*b^2+a22*b^2-2/(a12^2+a11^2)^(1/2)*a13*a12*a-2/(a12^2+a11^2)
^(1/2)*a13*a11*b+2/(a12^2+a11^2)^(1/2)*a23*a11*a-2/(a12^2+a11^2)
^(1/2)*a23*a12*b+a33;
```

$$k_2 := 2a_{11}b^2 + a_{22}b - \frac{2a_{13}a_{12}a}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}} - \frac{2a_{13}a_{11}b}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}} + \frac{2a_{23}a_{11}a}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}} - \frac{2a_{23}a_{12}b}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}} + a_{33}$$

Търсим такива a, b, че $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. Затова решаваме системата

```
solve({k1,k2},{a,b});
```

и намираме

```
a:=-(-a13^2*a11^2+a11*a33*a12^2+a11^3*a33-2*a13*a11*a23*a12-a23^2
*a12^2+a33*a22*a12^2+a33*a22*a11^2)/(2*a11^2*a23*(a12^2+a11^2)
^(1/2)-2*a11*a13*a12*(a12^2+a11^2)^(1/2)+2*a11*a23*(a12^2+a11^2)
^(1/2)*a22-2*a13*a12*(a12^2+a11^2)^(1/2)*a22);
```

$$a := -(-a_{13}^2a_{11}^2 + a_{11}a_{33}a_{12}^2 + a_{11}^3a_{33} - 2a_{13}a_{11}a_{23}a_{12} - a_{23}^2a_{12}^2 + a_{33}a_{22}a_{12}^2 + a_{33}a_{22}a_{11}^2)/(2a_{11}^2a_{23}\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2} - 2a_{11}a_{13}a_{12}\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2} + 2a_{11}a_{23}\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}a_{22} - 2a_{13}a_{12}\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}a_{22})$$

```
b:=(a13*a11+a23*a12)/(a12\ 2+a11\ 2)\ (1/2)/(a11+a22);
```

$$b := \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}(a_{11} + a_{22})}$$

Тогава за

```
k:=simplify(f);
```

намираме

```
k:= (a11^3+a11^2*a22+a11*a12^2+a22*a12^2)*Y^2+2*(a23*a11-a13*a12)
*sqrt(a11^2+a12^2)*X=0;
```

$$k := (a_{11}a_{12}^2 + a_{11}^3 + a_{22}a_{12}^2 + a_{22}a_{11}^2)Y^2 + 2(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{12})\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}X = 0,$$

откъдето се получава каноничното уравнение на кривата:

```
K:=Y^2=2*(a13*a12-a23*a11)*sqrt(a11^2+a12^2)/(a11*a12^2+
a11^3+a22*a12^2+a22*a11^2)*X;
```

$$K := Y^2 = \frac{2(a_{13}a_{12} - a_{23}a_{11})\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}X}{a_{11}a_{12}^2 + a_{11}^3 + a_{22}a_{12}^2 + a_{22}a_{11}^2}$$

Пример 2. Следва програма за канонизиране на парабола:

```
F:=a11*x^2+a22*y^2+2*a12*x*y+2*a13*x+2*a23*y+a33;
a11:=1;a22:=4;a12:=2;a13:=1;a23:=-2;a33:=6;
```

$$a_{11} := 1; \quad a_{22} := 4; \quad a_{12} := 2; \quad a_{13} := 1; \quad a_{23} := -2; \quad a_{33} := 6$$

```
s1:= 0; s2:= a11+a22;
p2:=(1/sqrt(a12^2+a11^2))*a11;p1:=-a12*1/sqrt(a11^2+a12^2);
```

$$p_2 := \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad p_1 := -\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

```
a:=-(-a13^2*a11^2+a11*a33*a12^2+a11^3*a33-2*a13*a11*a23*a12-
a23^2*a12^2+a33*a22*a12^2+a33*a22*a11^2)/(2*a11^2*a23*(a12^2+a11^2)
^(1/2)-2*a11*a13*a12*(a12^2+a11^2)^(1/2)+2*a11*a23*(a12^2+a11^2)
^(1/2)*a22-2*a13*a12*(a12^2+a11^2)^(1/2)*a22);
b:=(a13*a11+a23*a12)/(a12\ 2+a11\ 2)\ (1/2)/(a11+a22);
```

$$a := \frac{141\sqrt{5}}{200}, \quad b := -\frac{3\sqrt{5}}{25}$$

```
v1:=eval(x,[x1=a,y1=b]);v2:=eval(y,[x1=a,y1=b]);
```

$$v_1 := \frac{-129}{100}, \quad v_2 := \frac{189}{200}$$

```
with(plots): t1:=textplot([-0.2,-0.2,0],align={LEFT,DOWN},color=red):
t2:=plot([t,0,t=-3..3]):t10:=textplot([2.8,-0.1,e1],
color=red,align={DOWN}):
t3:=plot([0,t,t=-3..3]):t11:=textplot([-0.1,3,e2],color=red,align={LEFT}):
t4:=plot([p1*t,p2*t,t=-2..2],color=blue):
t5:=plot([-p2*t,p1*t,t=-2..2],color=blue):
t6:=textplot([v10.2,v2+0.13,V],align={WRITE,ABOVE},color=green):
t12:=textplot([p1*1.6-0.2,p2*1.6-0.2,f1],color=blue,align={ABOVE}):
t13:=textplot([-p2*1.6-0.2,p1*1.6,f2],color=blue,align={ABOVE}):
t14:=textplot([v1+p1*1.6,v2+p2*1.6-0.2,f1],align={WRITE},color=green):
t7:=plot([v1+p1*t,v2+p2*t,t=-2..2],color=green):
t8:=plot([v1-p2*t,v2+p1*t,t=-2..2],color=green):
t15:=textplot([v1-p2*1.6-0.2,v2+p1*1.6,f2],align={DOWN},color=green):
t9:=implicitplot(G=0,m=-5.2..4,n=0..4,color=red,thickness=2):
display([t1,t2,t3,t4,t5,t7,t6,t8,t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15]);
x:=simplify(x1*p1-y1*p2);y:=simplify(x1*(p2)+y1*p1);
x1:=X+a;y1:=Y+b;
```

$$x := \frac{2x_1\sqrt{5}}{5} - \frac{y_1\sqrt{5}}{5}, \quad y := \frac{x_1\sqrt{5}}{5} - \frac{2y_1\sqrt{5}}{5}, \quad x_1 := X + \frac{141\sqrt{5}}{200}, \quad y_1 := Y - \frac{3\sqrt{5}}{25}$$

```
K:=Y^2=2*(a13*a12-a23*a11)*sqrt(a11^2+a12^2)/(a11*a12^2+a11^3+
a22*a12^2+a22*a11^2)*X;
```

$$K := Y^2 = \frac{8\sqrt{5}Y}{25}$$

Накрая, за улеснение на читателя, ще дадем компютърна програма за чертаене на каква да е крива линия от втора степен, за да може той с компютърни средства да открие за каква крива линия става дума – централна или нецентрална, и подбере съответната програма.

```
with(plots):implicitplot(F(x,y)=0,x=xmin..xmax,y=ymin..ymax):
```

Грозьо Станилов
Славка Славова
Педагогически колеж Добрич
Добротица 12
9030 Добрич
e-mail: stanilov@fmi.uni-sofia.bg
slavova@dobrich.net

CANONIZATION OF CURVES OF SECOND ORDER BY COMPUTER METHODS

Grozio I. Stanilov, Slavka K. Slavova

We apply the computer algebra of MAPLE to canonize non-degenerated curves of second order, by giving two packages for this purpose: one for central curves (ellipsis, hyperbolas), and one for non-central curves (parabolas).