МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2008
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2008
Proceedings of the Thirty Seventh Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2008

# ЗА РОЛЯТА НА СИМЕТРИЯТА ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ МОДЕЛИ

**Стефка Димова**

"Винаги, когато ви се налага да работите с обект, имащ някаква структура, опитайте се да определите ... преобразованията, които оставят без изменение структурните съотношения. Вие можете да разчитате, че по този начин ще ви се удаде да проникнете дълбоко във вътрешния строеж на обекта."

Херман Вайл, "Симетрия"

Ще последваме препоръката на Херман Вайл при изследване на математически обекти, които имат определен вид симетрия. Ще разкрием съдържанието на основните елементи на понятието симетрия: *обект*, чиято симетрия се изследва, *трансформации*, по отношение на които той проявява симетрия, *инвариантност* (неизменност) на свойствата на обекта, изразяваща неговата симетрия. Ще покажем как с помощта на симетрията могат да се намират инвариантните решения на уравненията на математическата физика. Ще разгледаме математически модел на една нелинейна отворена система, чиито инвариантни решения описват процесите на самоорганизация в нея: възникването и самоподдържането (за определено време) на определени видове структури и вълни. Ще покажем как симетрията в математическия модел може да се използва при конструиране на числени методи за неговото изследване.

**Инвариантни частни диференциални уравнения. Инвариантни решения.** Обектът, чиято симетрия ще изследваме, е частното диференциално уравнение от втори ред за функцията $u = u(x, t)$:

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0, \quad (x, t) \in D. \tag{1}$$

Разглеждаме еднопараметричното семейство трансформации

$$\overline{x} = \varepsilon^a x, \qquad \overline{t} = \varepsilon^b t, \qquad \overline{u} = \varepsilon^c u, \tag{2}$$

където $a$, $b$, $c$ са фиксирани реални константи, а $\varepsilon$ е реален параметър със стойности в отворения интервал $I$, съдържащ $\varepsilon = 1$.

Да означим семейството трансформации (2) с $T_\varepsilon$, $T_\varepsilon : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ за всяко $\varepsilon \in I$. То съдържа идентичната трансформация $T_1$ в $\mathbb{R}^3$ при $\varepsilon = 1$, а композиционното

---

**2000 Mathematics Subject Classification:** 35K57, 35B41, 34B16, 34C14, 65P40.

**Ключови думи:** Нелинейни уравнения от тип реакция – дифузия, инвариантност, асимптотична устойчивост, динамични адаптивни мрежи.

Работата е частично финансирана от Фонда за научни изследвания на СУ по договор № 107/2007 г.

правило $T_{\varepsilon_1}T_{\varepsilon_2} = T_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ е в сила за всички $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$. Обратната трансформация на $T_\varepsilon$ е $T_{\varepsilon^{-1}}$. Следователно (2) е *локална група трансформации на Ли* в $\mathbb{R}^3$ с идентитет при $\varepsilon = 1$.

Да разгледаме резултата от прилагането на $T_\varepsilon$ при фиксирано $\varepsilon$ към повърхнина в $\mathbb{R}^3$, дефинирана чрез

$$u = \phi(x,t), \quad (x,t) \in D. \tag{3}$$

Повърхнината (3) се преобразува в повърхнина $\overline{\phi}$, дефинирана чрез

$$\overline{u} = \overline{\phi}(\overline{x},\overline{t}), \quad (\overline{x},\overline{t}) \in \overline{D}, \tag{4}$$

където $\overline{D} = \{(\overline{x},\overline{t}) \mid \overline{x} = \varepsilon^a x, \overline{t} = \varepsilon^b t, (x,t) \in D\}$ и $\overline{\phi}$ е дефинирана чрез

$$\overline{\phi}(\overline{x},\overline{t}) = \varepsilon^c \phi(\varepsilon^{-a}\overline{x}, \varepsilon^{-b}\overline{t}). \tag{5}$$

Равенството (5) се получава като приложим трансформацията (2) към множеството от точки $(x,t,\phi(x,t))$. В новите променливи записваме следното частно диференциално уравнение

$$F(\overline{x},\overline{t},\overline{u},\overline{u}_{\overline{x}},\overline{u}_{\overline{t}},\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}},\overline{u}_{\overline{x}\overline{t}},\overline{u}_{\overline{t}\overline{t}}) = 0, \qquad (\overline{x},\overline{t}) \in \overline{D}, \tag{6}$$

(със *същия* оператор $F$). Очевидно е, че ако $u = \phi(x,t)$ е решение на уравнението (1), то $\overline{u} = \phi(\overline{x},\overline{t})$ е решение на уравнението (6), понеже просто сме преименували променливите. Да отбележим, че изобщо $\overline{\phi}(\overline{x},\overline{t})$ е различна от $\phi(\overline{x},\overline{t})$.

**Пример 1.** Да разгледаме трансформацията

$$\overline{x} = \varepsilon x, \quad \overline{t} = \varepsilon^2 t, \quad \overline{u} = \varepsilon^3 u,$$

и нека $\phi(x,t) = x^2 - t^2$. Тогава $\phi(\overline{x},\overline{t}) = \overline{x}^2 - \overline{t}^2$, а от (5) получаваме $\overline{\phi}(\overline{x},\overline{t}) = \varepsilon^3(\varepsilon^{-2}\overline{x}^2 - \varepsilon^{-4}\overline{t}^2) = \varepsilon\overline{x}^2 - \overline{t}^2/\varepsilon$. Следователно $\phi(\overline{x},\overline{t}) \neq \overline{\phi}(\overline{x},\overline{t})$.

Да отбележим, че ако $u = \phi(x,t)$ е решение на уравнението (1), то $\overline{u} = \overline{\phi}(\overline{x},\overline{t})$ не е обезателно решение на уравнението (6). Но ако уравнението (1) е инвариантно относно трансформацията (2), то $\overline{u} = \overline{\phi}(\overline{x},\overline{t})$ ще бъде решение на уравнението (6).

**Дефиниция 1.** *Частното диференциално уравнение* (1) *е (с точност до константа) инвариантно относно еднопараметричното семейство трансформации $T_\varepsilon$, дефинирани в* (2) *тогава и само тогава, когато*

$$F(\overline{x},\overline{t},\overline{u},\overline{u}_{\overline{x}},\overline{u}_{\overline{t}},\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}},\overline{u}_{\overline{x}\overline{t}},\overline{u}_{\overline{t}\overline{t}}) = A(\varepsilon)F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}) \tag{7}$$

*за всяко $\varepsilon \in I$ и за някаква функция $A(\varepsilon)$ с $A(1) = 1$. Ако $A(\varepsilon) \equiv 1$, уравнението* (1) *се нарича абсолютно инвариантно.*

**Пример 2.** Да потърсим трансформация от вида (2), при която уравнението

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{8}$$

е инвариантно. В новите променливи получаваме:

$$\overline{u}_{\overline{t}\overline{t}} - \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} = \varepsilon^{c-2b}u_{tt} - \varepsilon^{c-2a}u_{xx}.$$

Ако $a = b$, то

$$\overline{u}_{\overline{t}\overline{t}} - \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} = \varepsilon^{c-2a}(u_{tt} - u_{xx}),$$

следователно $A(\varepsilon) = \varepsilon^{c-2a}$ и вълновото уравнение (8) е инвариантно относно трансформацията (2) за $a = b$ при произволни $a$ и $c$ .

**Теорема 1.** [1] *Ако частното диференциално уравнение* (1) *е инвариантно (с точност до константа) относно трансформацията* (2) *и ако $\phi(x,t)$ е решение на*

(1), *то* $\overline{\phi}(\overline{x},\overline{t})$, *дефинирано чрез* (5), *е решение на частното диференциално уравнение* (6).

**Пример 3.** Да изберем $a = b = 1,\ c = 2$ в Пример 2. Следователно уравнението (8) е абсолютно инвариантно относно трансформацията $\overline{x} = \varepsilon x, \overline{t} = \varepsilon t, \overline{u} = \varepsilon^2 u$. Решението $\phi(x,t) = \sin(x-t)$ на (8) се трансформира в $\overline{\phi}(\overline{x},\overline{t}) = \varepsilon^2 \sin((\overline{x}-\overline{t})/\varepsilon)$, което е решение на $\overline{u}_{\overline{t}\overline{t}} - \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} = 0$. Но $\phi(\overline{x},\overline{t}) = \sin(\overline{x}-\overline{t})$ и следователно $\overline{\phi}(\overline{x},\overline{t}) \neq \phi(\overline{x},\overline{t})$. Обаче решението $g(x,t) = (x-t)^2$ се трансформира в $\overline{g}(\overline{x},\overline{t}) = \varepsilon^2(\frac{\overline{x}}{\varepsilon} - \frac{\overline{t}}{\varepsilon})^2 = (\overline{x}-\overline{t})^2$, което съвпада с $g(\overline{x},\overline{t})$. Казваме, че решението $\phi(x,t)$ не е инвариантно относно трансформацията (2), а решението $g(x,t)$ е инвариантно.

**Дефиниция 2.** *Едно решение* $u = \phi(x,t), (x,t) \in D$, *на* (1) *е инвариантно решение относно трансформацията* $T_\varepsilon$ (*или инвариантна повърхнина*) *тогава и само тогава, когато*

$$\phi(\overline{x},\overline{t}) = \overline{\phi}(\overline{x},\overline{t}). \tag{9}$$

От равенството (9) може да се изведе условие, което да се използва за намиране на инвариантните решения. В термините на първоначалните променливи (9) е еквивалентно на

$$\phi(\varepsilon^a x, \varepsilon^b t) = \varepsilon^c \phi(x,t). \tag{10}$$

Понеже (10) е вярно за всяко $\varepsilon \in I$, то можем да го диференцираме по $\varepsilon$ и после да положим $\varepsilon = 1$. Получаваме частно диференциално уравнение от първи ред

$$ax\phi_x + bt\phi_t = c\phi. \tag{11}$$

Уравнението (11) се нарича *условие за инвариантност на повърхнината* (*за инвариантност на решението*). За да намерим общото му решение ще използваме метода на характеристиките. Характеристичната система на уравнението (11) е

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dt}{bt} = \frac{d\phi}{c\phi}.$$

Интегрирайки последователно първото и второто от двете равенства, получаваме два независими първи интеграла:

$$x^b t^{-a} = \text{const}, \qquad \phi t^{-c/b} = \text{const}.$$

Общото решение на уравнението (11) е

$$\Phi(\phi t^{-c/b}, x^b t^{-a}) = 0$$

за някаква функция $\Phi$. Следователно инвариантните повърхнини (решения) са от вида

$$\phi(x,t) = t^{c/b}\theta\left(\frac{x^b}{t^a}\right), \tag{12}$$

където $\theta$ е произволна функция. Равенството (12) дефинира формата на възможните инвариантни решения, породени от инвариантността на уравнението относно трансформацията (2). Този вид инвариантни решения се наричат още *автомоделни решения*. Аргументът на функцията $\theta$ в (12) се нарича *автомоделна променлива* и се бележи обикновено с $\xi$:

$$\xi = \frac{x^b}{t^a}.$$

Следователно инвариантното решение (12) може да се запише във вида

$$u = \phi(x,t) = t^{c/b}\theta(\xi) = \varphi(t)\theta(\xi).$$

В автомоделната променлива $\xi$ пространството и времето са свързани по специфичен начин. Автомоделната променлива задава мащаб, в който пространственият профил на решението остава неизменен (инвариантен) във времето, а амплитудата му се мени по закон, зададен с функцията $\varphi(t)$. От тук идва и понятието "автомоделни", т.е. "себеподобни", за такъв тип инвариантни решения. Да отбележим, че това е единственият тип инвариантни решения, които могат да бъдат получени и чрез методите на *размерностния анализ*.

Наличието на инвариантно решение от вида (12) дава възможност частното диференциално уравнение (1) да бъде трансформирано в обикновено диференциално уравнение относно *автомоделната функция* $\theta(\xi)$, т.е. *да се понижи реда на изходната диференциалната задача.*

**Теорема 2.** [1] *Ако частното диференциално уравнение* (1) *е инвариантно* (*с точност до константа*) *относно групата трансформации* (2)*, то полагането*

$$u = t^{c/b}\theta(\xi), \qquad \xi = \frac{x^b}{t^a}, \tag{13}$$

*в уравнението* (1) *води до обикновено диференциално уравнение за* $\theta$ *от вида*

$$H(\xi, \theta, \theta', \theta'') = 0.$$

**Инвариантни решения на математическия модел на топлинните структури.** Ще приложим току-що развитата техника за конструиране на автомоделните решения на следната задача от тип реакция-дифузия:

$$u_t = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + u^{\beta}, u = u(r,t), r > 0, t > 0, \sigma > 0, \beta > 1, \tag{14}$$

$$u(r,0) = u_0(r) \geq 0,\ r \geq 0, \tag{15}$$

$$u_r(0,t) = 0,\ t > 0, \tag{16}$$

$$u(\infty,t) = 0,\ t > 0, \tag{17}$$

$$u^{\sigma}u_r(r) = 0 \quad \text{ако} \quad u(r) = 0. \tag{18}$$

Тази задача е радиално-симетричен вариант на известния *модел на топлинните структури* [7], [5]:

$$u_t = \sum_{i=1}^{N}(k_i(u)u_{x_i})_{x_i} + Q(u),\ t > 0,\ x \in R^N, \tag{19}$$

въведен в школата на А. А. Самарский и С. П. Курдюмов. Този модел описва процесите на разпространение на топлината и горенето в среда с коефициенти на топлопроводност $k_i(u) \geq 0$ и източник $Q(u) \geq 0$, които са нелинейни функции на температурата $u(t,x) \geq 0$.

С най-голяма практическа значимост, а и най-богат на инвариантни решения, е моделът с коефициенти, които са степенни функции на температурата $u(r,t)$. Затова тук ще разгледаме случая на нелинейна среда с коефициент на топлопроводност

$k(u) = u^\sigma$ и обемен източник на топлина $Q(u) = u^\beta$.

В този случай задачата допуска важен клас решения, които клонят към безкрайност за **крайно време** $T_0$:

$$u(r,t) \to \infty,\ t \to T_0 - 0.$$

Такива сингулярни по времето решения се наричат **избухващи (blow-up) решения** и описват добре свръхбързи процеси в нелинейни отворени системи [5]. Времето $T_0$ се нарича **време на избухване (blow-up time)**.

**Необходимо условие** за крайно време на съществуване на решението е

$$F(s) = \int_s^\infty \frac{d\eta}{q(\eta)} = \int_s^\infty \frac{d\eta}{\eta^\beta} < \infty$$

и то е изпълнено при $\beta > 1$.

Да въведем функцията

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^u \frac{\eta^\sigma}{\eta} d\eta = \frac{u^\sigma}{\sigma}.$$

Следователно

$$\Phi(1) = \frac{1}{\sigma} < \infty, \quad (\sigma > 0).$$

Условието $\Phi(1) < \infty$ е **необходимо и достатъчно** условие за **крайна скорост на разпространение на топлината при** $Q(u) = 0$ **и начални данни** $u_0$ **с краен носител.**

**Инвариантни избухващи решения.** Търсим решения, инвариантни относно групата трансформации (2). Пресмятаме последователно:

$$u_t = \varepsilon^{b-c}\overline{u}_{\overline{t}}, \quad u_r = \varepsilon^{a-c}\overline{u}_{\overline{r}},$$

$$\frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{N-1}u^\sigma u_r) = \frac{N-1}{r}u^\sigma u_r + \frac{\partial}{\partial r}(u^\sigma u_r),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(u^\sigma u_r) = \varepsilon^{2a-c(\sigma+1)}\frac{\partial}{\partial \overline{r}}(\overline{u}^\sigma \overline{u}_{\overline{r}}).$$

Заместваме в уравнението (14) и получаваме

$$\varepsilon^{b-c}\overline{u}_{\overline{t}} = \frac{N-1}{\overline{r}}\varepsilon^{2a-c(\sigma+1)}\overline{u}^\sigma\overline{u}_{\overline{r}} + \varepsilon^{2a-c(\sigma+1)}\frac{\partial}{\partial\overline{r}}(\overline{u}^\sigma\overline{u}_{\overline{r}}) + \varepsilon^{-c\beta}\overline{u}^{-\beta},$$

така че условията за инвариантност са

$$b - c = 2a - c(\sigma+1) = -c\beta,$$

или, ако изберем $b = 1$:

$$a = \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)},\ b = 1,\ c = -\frac{1}{\beta-1}.$$

Така кандидатите за инвариантни решения са

$$u(r,t) = t^{c/b}\cdot\theta(\xi),\ \xi = \frac{r^b}{t^a},\ \text{или}\ u(r,t) = t^{-\frac{1}{\beta-1}}\cdot\theta(\xi),\quad \xi = \frac{r}{t^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}. \tag{20}$$

Понеже уравнение (14) е инвариантно и относно транслация по $t$, $\overline{t} = t \pm T_0$, то ще има и следното семейство инвариантни решения:

$$u(r,t) = (t \pm T_0)^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{(t \pm T_0)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}.$$

За удобство ние ще търсим **избухващи решения** от вида:

$$(21) \quad u_a(r,t) = \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}, \quad u_a(r,t) = \varphi(t)\ \theta\left(\frac{r}{\psi(t)}\right).$$

От (21) е ясно, че $u(r,t) \to \infty$ при $t \to T_0 - 0$.

**Понижаване реда на диференциалната задача. Автомоделна задача.** Заместваме (21) в уравнението (14) и след несложни преобразования получаваме обикновено нелинейно диференциално уравнение от втори ред относно автомоделната функция:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta^\sigma\theta')' - \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)T_0}\xi\theta' - \frac{1}{(\beta-1)T_0}\theta + \theta^\beta = 0.$$

Без ограничение на общността можем да положим $(\beta-1)T_0 = 1$. Тогава **автомоделното уравнение** добива вида

$$(22) \qquad \frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta^\sigma\theta')' - \frac{\beta-\sigma-1}{2}\xi\theta' - \theta + \theta^\beta = 0.$$

То има две константни решения – тривиалното, $\theta_H^0 \equiv 0$, и едно нетривиално, $\theta_H^1 \equiv 1$.

Търсим решение на уравнението (22) при условията, които следват от (16), (17) и (18):

$$(23) \qquad \theta'(0) = 0,$$

$$(24) \qquad \theta(\infty) = 0,$$

$$(25) \qquad \theta^\sigma\theta'(\xi) = 0 \quad \text{ако} \quad \theta(\xi) = 0.$$

Така успяхме да сведем начално-граничната задача за ЧДУ до гранична задача за ОДУ. От свойствата на решенията на последната задача можем да направим важни изводи за свойствата на решенията на изходната задача.

Да предположим, че $\theta(\xi)$ има максимум в точката $\xi_0$. Тогава $\theta'(\xi_0) = 0$, $\theta''(\xi_0) < 0$ и като положим $\xi = \xi_0$ в уравнение (22):

$$\left(\sigma\theta^{\sigma-1}(\theta')^2 + \theta^\sigma\theta'' + \frac{N-1}{\xi}\theta^\sigma\theta' - \frac{\beta-\sigma-1}{2}\xi\theta' - \theta + \theta^\beta\right)_{\xi=\xi_0} = 0,$$

заключаваме, че $(\theta^\beta - \theta)_{\xi=\xi_0} > 0$. Следователно $\theta(\xi_0) > 1$, понеже $\beta > 1$. Аналогично, ако $\theta$ има минимум при $\xi = \xi_0$, то $\theta(\xi_0) < 1$. Това означава, че в областта на своята немонотонност автомоделната функция $\theta$ ще осцилира около нетривиалното константно решение $\theta_H^1 \equiv 1$.

Изследванията на автомоделната задача показват, че свойствата на нейните решения, а оттам и свойствата на решенията на изходната задача, съществено зависят от съотношението на параметрите $\beta$ и $\sigma$ на средата, както и от размерността $N$ на пространството. Така се определят **базисните режими** на горене на средата, както и структурите, които могат да възникват и да се самоподдържат в нея. Поради определящата роля на автомоделните функции, те са наречени [3] *собствени функции* *на горене на нелинейната среда*, чийто модел е задачата (14)–(18).

**Случай $\beta = \sigma + 1$ ($S$-режим, избухване в крайна област).**

**N=1.** В този случай уравнението (22) е

$$(\theta^\sigma\theta') - \theta + \theta^{\sigma+1} = 0 \tag{26}$$

и има аналитично решение

$$\theta(\xi) = \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma+2}\cos^2\frac{\pi\xi}{L_s}\right)^{1/\sigma}, \quad L_s = \frac{2\pi\sqrt{\sigma+1}}{\sigma},\ \theta\left(\frac{L_s}{2}\right) = 0.$$

Функцията

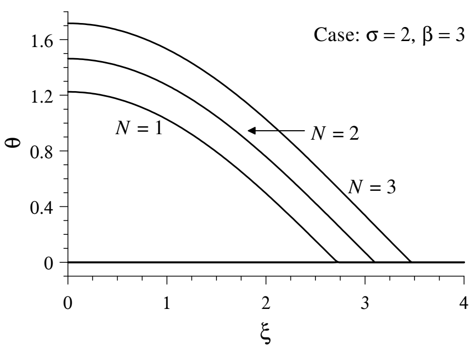
$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{2(\sigma+1)}{\sigma+2}\cos^2\dfrac{\pi\xi}{L_s}\right)^{1/\sigma}, & |\xi| \le \dfrac{L_s}{2} \\ 0, & |\xi| > \dfrac{L_s}{2} \end{cases} \tag{27}$$

която удовлетворява условието (25), също ще бъде решение. Стойността $L_s$ се нарича *фундаментална дължина на $S$-режима.* Уравнението (26) е автономно (не зависи явно от $\xi$), затова решението е *инвариантно и при транслация относно* $\xi$. Това означава, че уравнението (26) има изброимо много различни решения, които се състоят от произволен краен брой елементарни решения (27), изместени или не по оста $\xi$.

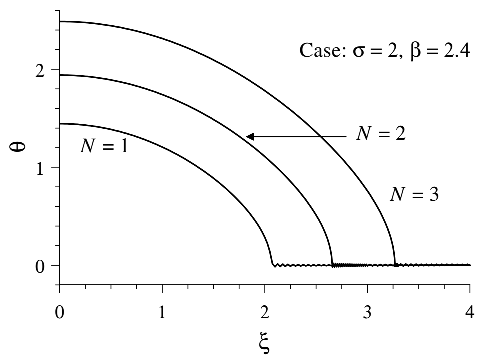
**N > 1**. В този случай уравнението (22) няма аналитично решение. Доказано е:

**Теорема 3.** [5] *При $N > 1$ и $\beta = \sigma+1$ задачата* (22)–(25) *има строго монотонно неотрицателно решение с краен носител и няма немонотонни решения.*

На фиг. 1 са показани графиките на автомоделните функции при $\sigma = 2$, $\beta = \sigma + 1 = 3$, $N = 1, 2, 3$.




Фиг. 1. $\beta = \sigma + 1$, S-режим




Фиг. 2. $\beta < \sigma + 1$, HS-режим

Автомоделното решение $u(r,t)$, съответстващо на $\theta$, ще има този постоянен носител за всяко $t$ и понеже $r = \xi$, то $u(r,t) \to \infty,\ t \to T_0 - 0$ за всяко $r$ от носителя на $\theta$. Казва се, че избухването е в крайна област ($S$-еволюция, по имената на А. А. Самарский и М. И. Соболь, които първи [6], през 1963 г., са открили феномена локализация на топлината.) Дифузията на топлината и интезивността на нагряването (източникът на топлина) се съгласуват така, че определят процес, **локализиран върху фундаменталната дължина.** В областта на локализация $\Omega_L = \{r = |x| < L_s/2\}$ средата се нагрява до безкрайна температура за време $T_0$.

**Случай $\beta < \sigma + 1$ ($HS$-еволюция, тотално избухване).**

**Теорема 4.** [5] *При $\beta < \sigma + 1$ задачата* (22)–(25) *има строго монотонно неотрицателно решение с краен носител и няма немонотонни решения. При $N = 1$ решението е единствено.*

На фиг. 2 са показани графиките на автомоделните функции при $\sigma = 2$, $\beta = 2.4 < \sigma + 1$, $N = 1, 2, 3$.

За фиксирано $\xi$ при $t \to T_0 - 0$, имаме $r = \xi \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}} \to \infty$. Автомоделното решение $u(r,t)$, съответстващо на $\theta$, определя топлинна вълна, която за време $T_0$ обхваща цялото пространство. Процесът не е локализиран.

**Случай $\beta > \sigma + 1$ ($LS$-еволюция, избухване в една точка).**

Задачата (22)–(25) няма решения с краен носител. Локалният анализ на уравнението (22) при $\xi \to \infty$ дава следната асимптотика на автомоделната функция [5]:

$$\theta(\xi) = C(\sigma, \beta, N)\xi^{-\frac{2}{\beta-\sigma-1}}(1 + \varepsilon(\xi)), \quad \varepsilon(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty. \tag{28}$$

**Теорема 5.** [5] *За $\sigma + 1 < \beta < \infty$, $N = 1, 2$, и*

$$\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2) = \beta_s, \ N \geq 3,$$

*задачата* (22)–(25) *има строго монотонно решение с асимптотика* (28).

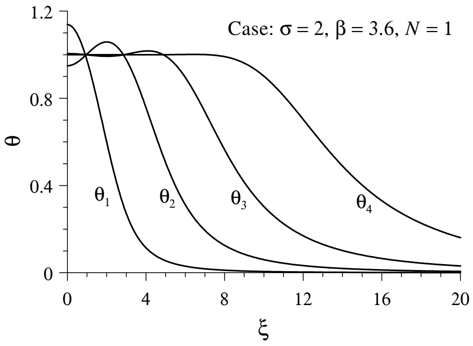
**Теорема 6.** [5], [2] *За $N = 1$ задачата* (22)–(25) *има не по-малко от $K - 1$ различни решения $\theta_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots K-1$, различаващи се по броя на екстремумите си при $\xi \in [0, \infty)$ , където*

$$K = -\left[-\frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}\right],$$

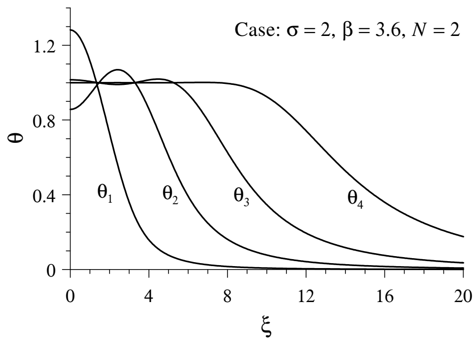
*$[a]$ означава цялата част на числото $a$.* В работата [4] този резултат е уточнен неотдавна с бифуркационен анализ: броят на решенията е $K = [a]$, ако $a$ не е цяло число, и $K = a - 1$, ако $a$ е цяло. За $N = 2, 3$ бифуркационният анализ дава същата оценка за броя на решенията, но при $\beta \approx \sigma + 1$, $\beta > \sigma + 1$ тя се нарушава [9].

На фиг. 3 ($N = 1$), фиг. 4 ($N = 2$), фиг. 5 ($N = 3$) са показани графиките на четирите автомоделни функции ($K = 4$), които съществуват при $\sigma = 2$, $\beta = 3.6 > \sigma + 1$. На фиг. 6 са показани графиките на втората автомоделна функция при $\sigma = 2$, $\beta = 3.18 > \sigma + 1$, $N = 1, 2, 3$. При $N = 2, 3$ автомоделните функции имат област с нулеви стойности около центъра на симетрия – факт, открит за първи път с числен експеримент и публикуван в работа [9].

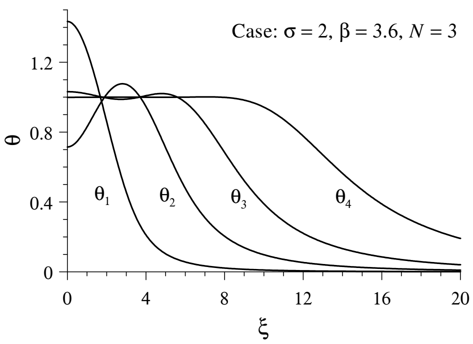
При $\beta > \sigma + 1$ интензивността на източника е по-силна от дифузията. Средата се нагрява до безкрайна температура за време $T_0$ само в една точка: $\mathrm{mes}\, \Omega_L = 0$, $t \to T_0^-$. В съответствие с различните решения $\theta_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots$, средата гори във вид



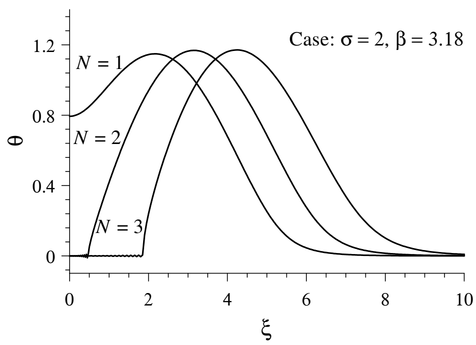

Фиг. 3. $\beta > \sigma + 1$, LS-режим




Фиг. 4. $\beta > \sigma + 1$, LS-режим




Фиг. 5. $\beta > \sigma + 1$, LS-режим




Фиг. 6. $\beta > \sigma + 1$, LS-режим

на прости ($i = 1$) и сложни структури ($i > 1$) с един и същи момент на избухване. В началния момент от време всяка структура "съдържа" определено количество "топлинна енергия" [3]

$$E_i = \int_0^\infty \theta_i(\xi) d\xi, \quad E_i > E_{i-1}, i = 2, \dots .$$

Така автомоделните функции $\theta_i(\xi)$ определят краен брой "енергетични нива", съществуващи по автомоделния закон (21) в течение на едно и също време $T_0$.

**Инвариантните решения като атрактори.** За да покажем значимостта на инвариантните решения като атрактори на широки класове други решения на същото уравнение, ще въведем още няколко понятия.

При произволни *финитни* начални данни $u_0(r)$ (15) дефинираме *автомоделно представяне* на решението $u(t, r)$ на задачата (14)–(18), което във всеки момент от време се определя в съответствие с вида на автомоделното решение (21):

$$\Theta(t, \xi) = (1 - t/T_0)^{\frac{1}{\beta - 1}}\, u\left(t, \xi\,(1 - t/T_0)^{\frac{(\beta - \sigma - 1)}{2(\beta - 1)}}\right) = \varphi^{-1}(t) u(t, \xi\psi(t)) \tag{29}$$

Автомоделното решение $u_a(t, r)$ се нарича **асимптотично устойчиво**, ако съществува достатъчно широк клас решения $u(t, r)$ на задачата (14)–(18) с начални данни $u_0(r) \not\equiv \theta(r)$, автомоделните представяния $\Theta(t, \xi)$ на които клонят в някаква норма към $\theta(\xi)$, когато $t \to T_0^-$:

$$\|\Theta(t,\xi) - \theta(\xi)\| \to 0, \; t \to T_0^-. \tag{30}$$

В определението на автомоделното представяне (29) участва неизвестното време на избухване $T_0$, затова то е непригодно за числено изследване на асимптотичната устойчивост на автомоделното решение. В работата [2] е предложен и числено реализиран (при $N = 1$) друг подход, позволяващ да се изследва **"структурната" устойчивост** на неограничените автомоделни решения в специална **"автомодел-на" норма**, съгласувана при всяко $t$ със структурата на автомоделното решение, но неизползваща в явен вид времето на избухване $T_0$. Дефинира се ново автомоделно представяне

$$\Theta(t,\xi) = u(t, \xi(\gamma(t))^{-2/(\beta-\sigma-1)})/\gamma(t), \qquad \gamma(t) = \frac{\max_r u(t,r)}{\max_\xi \theta(\xi)}. \tag{31}$$

Автомоделното решение $u_a(t,r)$ се нарича *структурно устойчиво*, ако сходимостта (30) е в сила за $\Theta(t,\xi)$, зададена чрез (31).

За автомоделните решения със сложна пространствено-временна структура, съответстващи на немонотонни автомоделни функции, се въвежда понятието метаустойчивост.

Автомоделното решение $u_a(t,r)$ се нарича **метаустойчиво**, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува клас начални данни $u_0(r) \approx \theta(r)$ и време $T$, $T_0 - T \ll T_0$ такива, че за автомоделните представяния (31) на съответните решения е в сила

$$\| \Theta(t,\xi) - \theta(\xi) \|_{C(\overline{\Omega})} \le \varepsilon, \quad 0 \le t \le T. \tag{32}$$

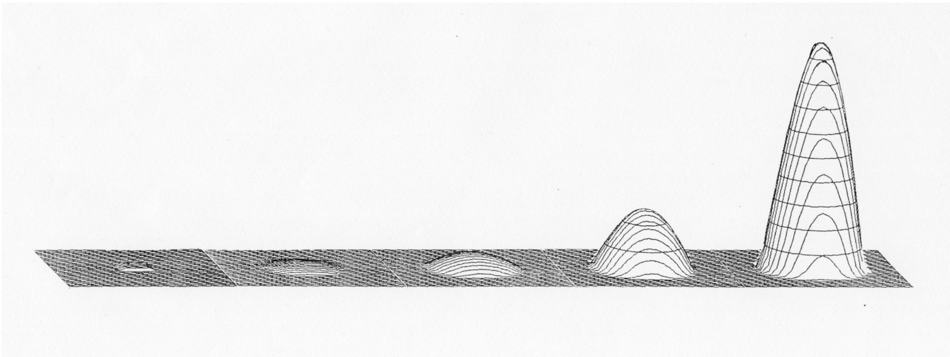
Понятията структурна устойчивост и метаустойчивост отразяват същността на режимите с избухване. Автомоделните решения, съответстващи на автомоделни функции с един максимум, са структурно устойчиви – те запазват автомоделната си структура до самия момент на избухване. Нещо повече – решения, отговарящи на произволни начални данни, на асимптотичния стадий клонят към автомоделните решения при съответните параметри на средата. В процеса на еволюцията началните данни се "забравят" и процесът се развива в автомоделен режим.

На фигури 7, 8 и 9 едно и също начално смущение в нелинейна топлопроводна среда с различни параметри $\beta$ и $\sigma$ определя три съвсем различни топлинни структури [8]. Те отговарят на автомоделните решения с един максимум на уравнението (19) при $N = 2$, $k_i(u) = u^{\sigma_i}, \; i = 1, 2, \;\; Q(u) = u^\beta$.

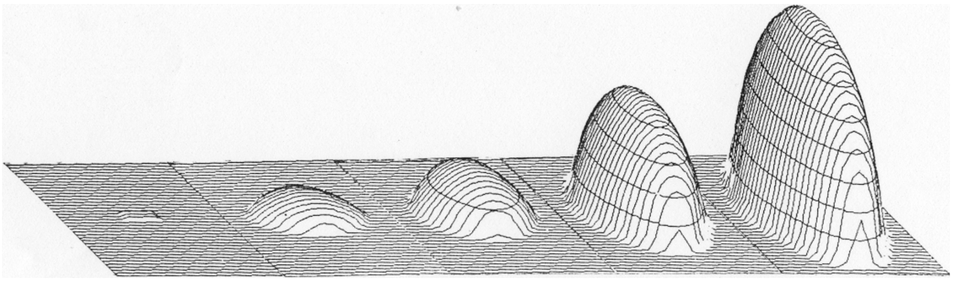
На фиг. 7 е представен случаят $\sigma_1 = \sigma_2$, $\beta = \sigma_i + 1$, следователно средата е изотропна и това е простата цилиндрически симетричната локализирана структура на $S$-режима, отговаряща на автомоделната функция от фиг. 1, $N = 2$.

На фиг. 8 е представен случаят $\beta < \sigma_1 + 1$, $HS$-режим), $\beta = \sigma_2 + 1$, ($S$-режим), средата е анизотропна и се реализира смесен, $HS - S$-режим. В направление $x_2$ процесът на разпространение на топлината се локализира, а в направление $x_1$ топлинната вълна се стреми да "достигне до безкрайност" при $T \to T_0$.

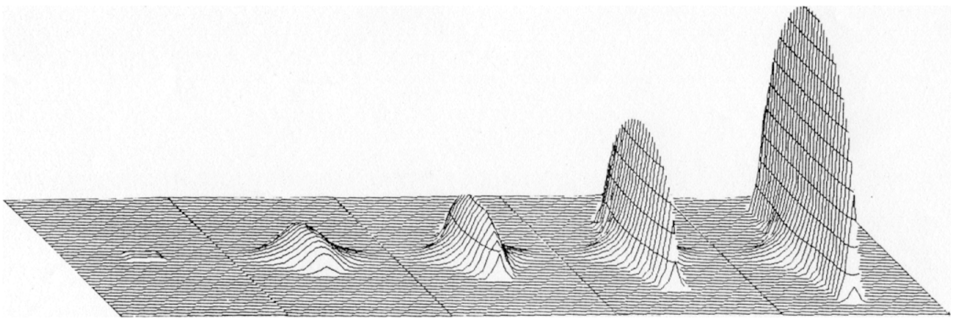
На фиг. 9 имаме $\beta < \sigma_1 + 1$, ($HS$-режим), $\beta > \sigma_2 + 1$, ($LS$-режим), средата е анизотропна и се реализира $HS - LS$-режим, когато на асимптотичния стадий, при $T \to T_0$, разпределението се стреми към "полуравнина, нагрята до безкрайна температура".



Фиг. 7. $S$-режим: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 2$, $\beta = 3$.

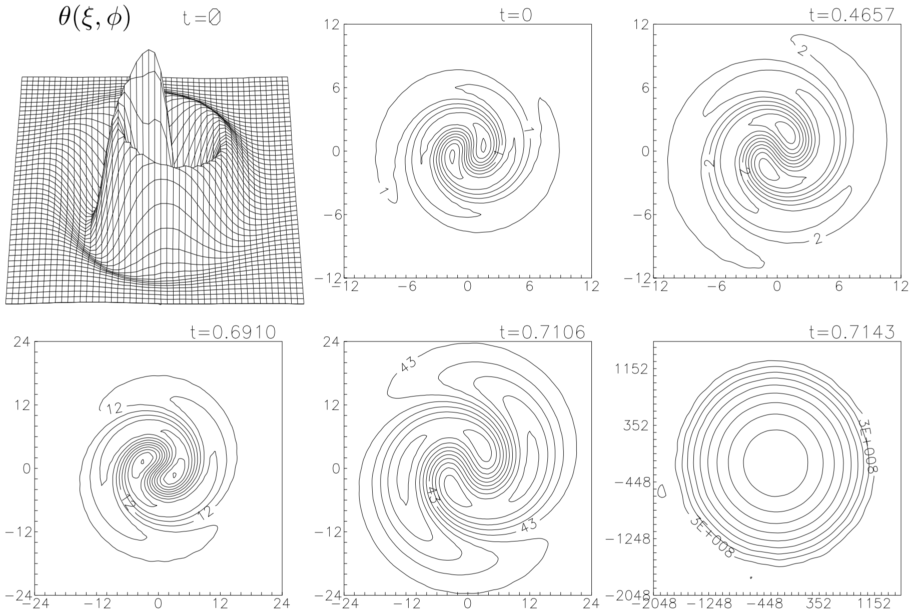


Фиг. 8. $HS - S$-режим: $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\beta = 3$.

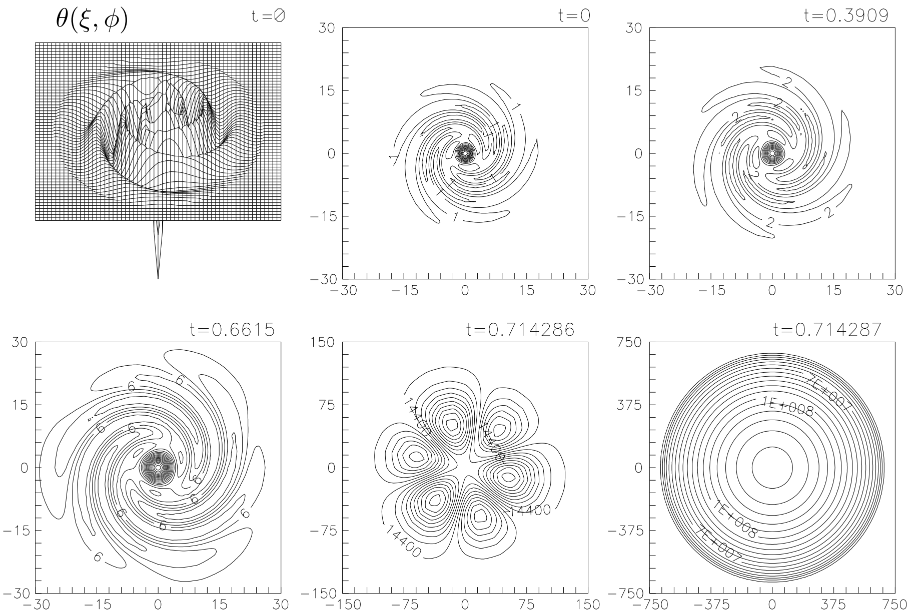


Фиг. 9. $HS - LS$-режим: $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $\beta = 3$.

Сложните (немонотонни) структури са метаустойчиви. Те се реализират в средата само при "резонансно" възбуждане – ако началното смущение е автомоделно. Те запазват автомоделната си структура до време $T < T_0$, което зависи от случайните флуктуации в средата (в числения експеримент то зависи от точността, с която е пресметната автомоделната функция, както и от точността, с която се решава еволюционната задача). Близо до момента на избухване те се израждат в прости, при това израждането може да става по различен начин – сложната структура може да се изроди в една или в няколко прости структури.




Фиг. 10. Еволюция на едноръка спирална вълна, $HS$-режим: $\sigma = 2$, $\beta = 2.4$.




Фиг. 11. Еволюция на трирька спирална вълна, $HS$-режим: $\sigma = 2$, $\beta = 2.4$.

На фигури 10 и 11 е показана еволюцията на две сложни структури на $HS$-режима, които са инициирани от по-сложни двумерни инвариантни решения в полярни координати [8], [10], [11]. На асимптотичния стадий те се израждат в простата радиално-симетрична структура, съответстваща на автомоделната функция от фиг. 2 при $N = 2$. Точното време на избухване, заложено в автомоделното уравнение, е $T_0 = 1/(\beta - 1) = 0.(714285)$. И двете сложни структури запазват автомоделното си поведение до времена, много близки до $T_0$.

**Динамични адаптивни мрежи, съгласувани с автомоделния закон.** Ако диференциалното уравнение $u_t = Lu$ допуска автомоделно решение

$$u_a(t,r) = \varphi(t)\theta(\xi), \quad \xi = r/\psi(t),$$

то връзката между $r$ и $\xi$ дава идея как да се адаптира мрежата по пространството. За задачата (14)–(18) връзката е:

$$\xi = r\Gamma(t)^m, \qquad \Delta\xi = \Delta r\Gamma(t)^m, \qquad \Gamma(t) = \frac{\max_r u(t,r)}{\max_r u_0(r)}, \qquad m = (\beta - \sigma - 1)/2. \tag{33}$$

- $\beta = \sigma + 1: \quad \xi = r, \quad 0 \le t < T_0;$
- $\beta < \sigma + 1: \quad \xi \to 0 \quad$ при $t \to T_0;$
- $\beta > \sigma + 1: \quad \xi \to \infty \quad$ при $t \to T_0.$

Въз основа на тези съотношения е изработена **следната стратегия за адаптация**. Нека $\Delta r^{(k)}$ е стъпката по пространствената променлива в момента $t = t^k$.

**В $LS$-режим,** $m > 0$**,** стъпката $\Delta r^{(k)}$ се избира така, че стъпката $\Delta\xi^{(k)}$ да бъде ограничена отгоре: $\Delta\xi^{(k)} = \Delta r^{(k)}\Gamma(t)^m \le \lambda h_0$. Така когато $\Gamma(t)$ расте, мрежата по $r$ се сгъстява.

**В $HS$-режим,** $m < 0$**,** стъпката $\Delta r^{(k)}$ се избира така, че стъпката $\Delta\xi^{(k)}$ да бъде ограничена отдолу: $h_0/\lambda \le \Delta\xi^{(k)} = \Delta r^{(k)}\Gamma(t)^m$. Когато $\Gamma(t)$ расте, мрежата по $r$ се разрежда, като при това интервалът по $r$ се увеличава, а броят на точките се запазва.

Тази идея – влагане на структурните свойства (геометрия, различни видове симетрия, закони за запазване) на непрекъснатите модели при разработване на дискретни методи – лежи в основата на ново важно направление в изчислителната математика – геометричното интегриране, на което са посветени много работи и монографии (например [12], [13]). Предимството на изложения по-горе подход в сравнение с прилагания най-често метод на подвижните мрежи [13] е в това, че за мрежата не се решава допълнителна диференциална задача.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] D. Logan. Applied Mathematics, A Contemporary Approach, J. Wiley & Sons, New York, 1987.

[2] Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский. Нестационарные дисипативные структуры в нелинейной топлопроводной среде. *ЖВМ и МФ*, **23** (1983), № 2, 38–90.

[3] С. П. Курдюмов. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. В: Современные проблемы матем. физики и вычислительной математики. Москва, Наука, 1983, 217–243.

[4] Е. С. Куркина, С. П. Курдюмов. Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением. *Доклады РАН*, **395** (2004), № 6, 743–748.

[5] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва, Наука, 1987.
[6] А. А. Самарский, И. М. Соболь. Примеры численного расчета температурных волн. *ЖВМ и МФ*, **3** (1963), № 4, 18–28.
[7] В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. *Совр. пробл. матем. Новейшие достижения.* т. **28**, ВИНИТИ АН СССР, Москва, 1986, 95–206.
[8] М. И. Бакирова, С. Н. Димова, В. А. Дородницын, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский, С. Р. Свирщевский. Инвариантные решения уравнений теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде, *ДАН СССР*, **299** (1988), № 2, 346–350.
[9] С. Н. Димова, М. С. Касчиев, С. П. Курдюмов. Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально–симметричном случае, *ЖВМ и МФ*, **29** (1989), № 6, 61–73.
[10] S. N. Dimova, D. P. Vasileva. Numerical realization of blow-up spiral wave solutions of a nonlinear heat-transfer equation. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, **4** (1994), No. 6, 497–511.
[11] S. N. Dimova, M. S. Kastchiev, M. G. Koleva, D. P. Vasileva. Numerical analysis of radially nonsymmetric blow-up solutions of a nonlinear parabolic problem. *J. Comp. Appl. Math.*, **97** (1998), 81–97.
[12] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. Geometric Numerical Integration. Structure-preserving Algorithms for ODE. Springer, 2002.
[13] C. J. Budd, W. Huang, R. D. Russell. Moving mesh methods for problems with blow-up. *SIAM J. Sci. Comp.*, **17** (1996), 2, 305–327.

Стефка Димова
СУ "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика
бул. Дж. Баучер №5
1164 София
e-mail: dimova@fmi.uni-sofia.bg

## THE ROLE OF SYMMETRY IN THE ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS

**Stefka Dimova**

Mathematical models having symmetry are considered. The main elements of the notion of symmetry are introduced: object, whose symmetry is investigated; transformations, under which it is symmetric; the invariance of the object's properties, expressing its symmetry. It is shown how the symmetry is used to find the invariant solutions of the equations of mathematical physics. The mathematical model of an open nonlinear system, whose invariant solutions describe the processes of selforganization in it, is investigated. It is shown how the symmetry of the mathematical model may be used when constructing numerical methods for its analysis.