

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2008
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2008
Proceedings of the Thirty Seventh Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2008*

**АНАЛИЗ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ
КАНДИДАТСТУДЕНТСКИЯ ИЗПИТ ПРЕЗ 2007 ГОДИНА,
КОИТО ИЗПОЛЗВАТ КВАДРАТНА ФУНКЦИЯ**

Цеца Илиева Байчева

Настоящата разработка представя идеи на рационални начини за решаване на задачи, давани на кандидатстудентските изпити през 2007 година във ВУЗ, които използват квадратно уравнение, квадратно неравенство, разположение на корените на квадратен тричлен.

С въвеждането на закона за автономията на ВУЗ знаем, че висшите училища, където има приеман изпит по математика, предлагат теми с различен брой задачи и разнообразно съдържание. Нещо повече: от 2005 година една част от университетите в България провеждат и предварителни изпити. В резултат на това се получава голямо разнообразие от задачи. Естествено различните вузове имат различни изисквания и предлаганите теми е нормално да се различават по сложност на решенията на задачите.

През 2007 година на кандидатстудентските изпити по математика са дадени повече от двадесет задачи, свързани с квадратно уравнение, квадратно неравенство, разположение на корените на квадратен тричлен и приложението им. Малка част от задачите са сравнително лесни и се решават с директно приложение на изученото учебно съдържание (дори с това от задължителната подготовка). Друга голяма част от задачите, за да бъдат решени вярно и бързо, изискват съобразителност за прилагане на рационален, „хитър“ начин. При тях досещането за използване на този начин води бързо до вярно решение. Така остава повече време за по-трудните задачи, тъй като обикновено се счита, че горепосочените задачи са по-лесните в изпитната тема.

За да могат да мислят и решават рационално по време на кандидатстудентските изпити, учениците трябва да са подготвени преди това в училище. За тази цел в часовете по математика те трябва да се обучават така, че не само да заучат необходимата теория – теореми и определения, но и да се научат да мислят, да осмислят поставения проблем (в случая текста на задачата, която трябва да се реши), а не да бързат да стигнат до крайния резултат. Нещо повече, да умеят да се досетят да открият рационално решение, т.е. да направят „правилния“ избор на решение на конкретната задача. Разбира се, предварително учениците трябва да имат изградени умения относно избор на начин на решаване. За тази цел е необходимо да се

отделят достатъчен брой часове и в тях да се решават целесъобразни задачи. Макар че с въвеждането на тестовите в някои университети времето, което се отделя на една задача, е малко и трябва да се бърза. Но за да се реши задачата вярно и без да се губи излишно време, трябва да се „бърза бавно“, т.е. първо да се осмисли задачата и в зависимост от това, какво се търси и какво е дадено, да се приложи подходящ рационален начин за решение. За целта кандидат-студентите е необходимо предварително да познават различните методи за решаване и в процеса на решаване на конкретната задача да се досетят за възможните ситуации и да могат да изберат кой е най-рационалният начин на решение.

Ще разгледаме споменатия проблем с конкретни примери от последната кандидатстудентска кампания.

1. В задача 16 на ШУ „Епископ К. Преславски“ от 28 юли 2007 „*Дадено е уравнението $x^2 - (5a + 1)x + 6a^2 + 2a = 0$, където a е реален параметър. а) Решете уравнението. б) Намерете за кои стойности на a корените на уравнението са положителни числа.*“ е по-рационално да не се използват формулите на Виет, а да се реши системата
$$\begin{cases} x_1 = 2a > 0 \\ x_2 = 3a + 1 > 0, \end{cases}$$
 защото дискриминантата е точен квадрат, а и корените x_1 и x_2 вече са намерени в подточка а).

2. В задача 3.1 на МГУ „Св. Иван Рилски“ от 26 юли 2007 „*Дадена е функцията $g(x) = px^2 - (p - 1)x - 2p + 1$, където $p \neq 0$ е реален параметър. Намерете при какви стойности на параметъра p произведението от корените на уравнението $g(x) = 0$ е равно на 3.*“ дискриминантата също е точен квадрат, но е по-кратко не се да търсят корените, а направо да се използва от формулите на Виет $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{1 - 2p}{p} = 3$. Тук възниква въпросът за точната формулировка на задачите. В условието на задачата не се споменава нищо за вида на корените. Учениците в училище учат комплексни числа и верността на формулите на Виет и при тях. Следователно, те могат да изпуснат разглеждането на дискриминантата.

3. В задача 16 на УАСГ от 13 юли 2007 „*Дадена е функцията $f(x) = 2^{2\cos x} - 3a \cdot 2^{\cos x} + 2a^2$, където a е параметър. а) Решете уравнението $f(x) = 0$ за $a = 1$. б) За кои стойности на a уравнението $f(x) = 0$ има решение?*“ след полагането $2^{\cos x} = u$ и достигане до квадратното уравнение $u^2 - 3au + 2a^2 = 0$, трябва да се внимава за множеството, в което се изменя новото неизвестно. От $\cos x \in [-1; 1]$ следва $u \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Тук отново дискриминантата $D = a^2$ е точен квадрат и е по-кратко да се намерят корените $u_1 = a$ и $u_2 = 2a$ и за тях да се решат неравенствата $\frac{1}{2} \leq a \leq 2 \cup \frac{1}{2} \leq 2a \leq 2$.

4. В задача 4 на ТУ от 12 май 2007 „*Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $(a - 1)3^{2x+1} - (4a + 2)3^x + a + 1 = 0$ има два реални корена, чието произведение е отрицателно число.*“ след полагане $3^x = u$ трябва $0 < u_1 < 1 < u_2$. В случая решението е по-кратко, като се използват теоремите за разположение на корените на квадратен тричлен.

5. В задача 2 на Академия на МВР от 7 юли 2007 „*Дадена е функцията $f(x) = 3px^2 + (p - 2)x + p^2 - p - 2$, където p е реален параметър. Да се намерят стойнос-*

тите на параметъра p , за които уравнението $f(x) = 0$ притежава реални корени с различни знаци.“ условието дискриминантата да е положителна не е необходимо. Достатъчно е да се приложи $\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{p^2 - p - 2}{3p} < 0 \Leftrightarrow \frac{(p-2)(p-1)}{3p} < 0$, което неравенство се решава бързо чрез метода на интервалите. Нещо повече: ако започне да се пресмята дискриминантата и отново не се „мисли“, се получава неравенството $-12p^3 + 13p^2 + 20p + 4 > 0$, което, за да се реши, трябва да се знае и използва схемата на Хорнер и се стига до дълги и излишни пресмятания. Схемата на Хорнер се учи само в училищата с профилирана подготовка по математика.

6. Задача 5 на СУ „Св. Климент Охридски“ от 26 юли 2007 „Намерете всички стойности на реалния параметър p , при които неравенствата $-9 \leq \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} \leq 6$ са изпълнени за всяко реално число x .“ се решава рационално, като още в началото се докаже, че $x^2 - x + 1 > 0$, $\forall x$ и двойното неравенство се освободи от знаменател, независимо от това, че е дробно.

7. Когато дискриминантата не е точен квадрат, рационален начин е използването на теоремите за разположение на корените на квадратен тричлен. Без тях трябва да се решават ирационални неравенства, което отнема време и дава възможност за допускане на грешки. Такива са следните задачи:

7.1. Задача 2 на ПУ „П. Хилендарски“ от 15 юли 2007 „Нека $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos^2 x + 3$. Намерете всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $f(x) = a$ има решение.“

7.2. Задача 2 на ВСУ „Любен Каравелов“ от 25 юли 2007 „Дадено е уравнението $5 - 4 \sin^2 x - 8 \cos^2 \frac{x}{2} = 3t$, където t е реален параметър. а) Да се реши уравнението при $t = 0$. б) Да се намерят всички цели стойности на параметъра t , при които уравнението има решение.“

7.3. Задача 4 на ТУ от 16 юли 2007 „Да се намерят стойностите на реалния параметър p , за които функцията $f(x) = 16(p+1) \sin x - \sin 2x - 2(8p^2 + 16p - 5)x$ е намаляваща в $(-\infty; +\infty)$.“

7.4. Задача 1 на МГУ „Св. Иван Рилски“ от 12 юли 2007 „Дадено е уравнението $9^x - 4 \cdot 3^x + 4 = p$, където p е реален параметър 1.1 Решете уравнението при $p = 1$. 1.2 За кои стойности на параметъра p уравнението има два реални различни корена?“

7.5. Задача 1а на НВУ „Васил Левски“ от 28 април 2007 „Дадено е уравнението $x^2 - 2(b+1)x + 4b^2 = 0$, където b е реален параметър а) Да се намерят стойностите на параметъра b , при които уравнението има два различни положителни корена.“

7.6. Задача 13 от Модул 3 - математика на Университет за национално и световно стопанство от 14 юли 2007 „Нека $x_1 \neq x_2$ са корените на уравнението $ax^2 - 3ax + 1 = 0$. Намерете всички значения на параметъра a , за които $1 \in (x_1; x_2)$.“

8. В задача 2а на РУ „А. Кънчев“ от 15 юли 2007 „Дадено е уравнението $ax^2 + 2(a-6)x + a = 0$, където $a \neq 0$ е реален параметър, а x_1 и x_2 са корени на уравнението. а) Намерете стойностите на a , за които изразът $x_1^2 + x_2^2$ има най-малка

стойност. б) Намерете стойностите на a , за които x_1 и x_2 са различни положителни числа.“ трябва да се уточни иска ли се корените да са реални, защото търсената най-малка стойност се достига при различни стойности на параметъра a в зависимост от това, дали са реални или не корените x_1 и x_2 на даденото уравнение.

Конкретно $g(a) = x_1^2 + x_2^2 = \frac{4(a-6)^2}{a^2} - 2 \geq -2, \forall a$, като равенство се достига при $a = 6$, ако корените са произволни числа (т.е. може да са и комплексни числа). Ако се иска корените да са реални, тогава $D = 36 - 12a \geq 0, a \neq 0$, т.е. $a \leq 3$. В този случай се получава, че търсената най-малка стойност е при $a = 3$. За да направят тези разсъждения обаче учениците трябва да са обучавани и обучени да мислят на всяка стъпка, а не да бързат да получат отговора.

9. В задача 2.3 на ВТУ „Св. Св. Кирил и Методий“ от 13 юли 2007 „Дадени са функциите $f(x) = x^2 - 2(k+2)x + 1$ и $g(y) = y^2 - 2(k-1)y + 1$, където k е реален параметър. Да се намерят стойностите на k , за които: 2.1 уравненията $f(x) = 0$ и $g(y) = 0$ имат реални корени; 2.2 функцията $\varphi(k) = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$ приема най-малката си стойност, където x_1, x_2 и y_1, y_2 са съответните реални корени на уравненията от 2.1; 2.3 $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$ където x_1, x_2 и y_1, y_2 са корените от 2.2.“ е рационално да се постъпи по следния начин: Нека y е корен на уравнението $g(y) = 0$. От условието $y \in (x_1, x_2)$ следва $f(y) < 0$. Получаваме системата $\begin{cases} g(y) = 0 \\ f(y) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2(k-1)y + 1 = 0 \\ y^2 - 2(k+2)y + 1 < 0, \end{cases}$ а от нея $y > 0$, т.е. $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. За това е необходимо да са изпълнени едновременно следните условия: $y_1 + y_2 = 2(k-1) > 0, y_1 y_2 = 1$ и $D_g = k^2 - 2k > 0$. Окончателно получаваме $k \in (2; +\infty)$.

За по-кратко решение в тази задача се използва преобразованието $y^2 - 2(k+2)y + 1 = y^2 - 2(k-1)y + 1 - 6y$, откъдето се прави изводът, че $-6y < 0$, т.е. $y > 0$.

10. В задача 2.3 на ВТУ „Св. Св. Кирил и Методий“ от 18 юли 2007 „Дадена е функцията $f(x) = (k+1)x^2 + (2k+1)x + k - 1$, където k е реален параметър. Да се намерят стойностите на k , за които: 2.1 уравнението $f(x) = 0$ има реални корени; 2.2 уравнението $f(x) = 0$ има реални корени с различни знаци; 2.3 неравенството $f(x) > 0$ има поне едно решение по-малко от 1.“ е по-добре първо да се намерят тези стойности на параметъра, които не изпълняват исканото условие и тогава решение на задачата ще бъдат останалите стойности. Т.е. Ако $k = -1$ даденото неравенство е линейно и решенията му са $x < -2$, т.е. $k = -1$ е решение на задачата. Нека $k \neq -1$. Ще намерим множеството M на онези реални k , за които неравенството $f(x) > 0$ няма решение, по-малко от 1. Тогава решение на задачата ще бъдат останалите реални стойности на k , т.е. $k \in \mathbb{R} \setminus M$. Намираме $D = 4k + 5$ и $f(1) = 4k + 1$. Случай 1: неравенството $f(x) < 0$ е изпълнено за $\forall x$, т.е. $k + 1 < 0$ и $4k + 5 \leq 0$. Получаваме $k \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right]$; Случай 2: коефициентът пред x^2 е отрицателен и разположението на корените на $f(x)$ е $1 < x_1 < x_2$.

Получаваме последователно $\begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ af(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 1 < 0 \\ 4k + 5 \geq 0 \\ (k+1)(4k+1) > 0 \\ -\frac{2k+1}{2(k+1)} < 1, \end{cases}$ която система

няма решение. Оттук получаваме $M = \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right]$, което означава, че решение на задачата са $k \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

11. Ще се спрем на две задачи от Софийски университет.

11.1 В задача 10 на СУ „Св. Климент Охридски“ от 12 юли 2007 „Измежду всички квадратни функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяващи условията $|f(-1)| \leq 1$ и $|f(1)| \leq 1$, да се намерят тези, които имат възможно най-малка дискриминанта.“ основната част от доказателството, което предлагаме, следва извеждането на формулите за корените на квадратно уравнение. Търсим най-малката стойност на $D = b^2 - 4ac$. Да отбележим, че ако $f(x)$ е решение, то и $-f(x)$ е решение. Затова ще разгледаме само случая $a > 0$. Извършваме следните преобразувания:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}. \text{ Но } f(1) = a \left(1 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a} = \frac{(2a+b)^2 - D}{4a}, \quad f(-1) = \\ &= a \left(1 - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a} = \frac{(2a-b)^2 - D}{4a}. \text{ От } |f(1)| \leq 1, |f(-1)| \leq 1 \text{ следва } (2a+b)^2 - D \leq 4a, \\ &(2a-b)^2 - D \leq 4a. \text{ Събираме последните две неравенства и получаваме } 4a^2 + b^2 - D \leq 4a, \\ &D \geq 4a^2 + b^2 - 4a, \text{ т.е. } D \geq (2a-1)^2 + b^2 - 1 \text{ или } D \geq -1. \text{ Следователно най-малката стойност на } D \text{ е } -1. \text{ Получаваме } (2a-1)^2 = 0, b^2 = 0, a = \frac{1}{2}, \\ &b = 0. \text{ От } b^2 - 4ac = -1 \text{ следва } c = \frac{1}{2}. \text{ Решения на задачата са } f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \text{ и } \\ &f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

11.2 В задача 10 на СУ „Св. Климент Охридски“ от 26 юли 2007 „Дадени са функциите $f(x) = x^2 + ax + b$ и $g(x) = x^2 - ax + c$, където реалните числа a, b и c удовлетворяват неравенството $2a^2(b+c) + (b-c)^2 < 0$. Докажете, че всяко от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ има реални и различни корени.“ се използват свойства на квадратната функция, които се изучават в задължителната подготовка по математика. Най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 + ax + b$ е $f\left(-\frac{a}{2}\right) = b - \frac{a^2}{4}$ и за $g(x) = x^2 - ax + c$ е $g\left(\frac{a}{2}\right) = c - \frac{a^2}{4}$. Нека означим $b - \frac{a^2}{4} = x$ и $c - \frac{a^2}{4} = y$. Тогава $b = x + \frac{a^2}{4}$ и $c = y + \frac{a^2}{4}$. Даденото по условие неравенство за a, b и c приема вида $2a^2 \left(x + y + \frac{a^2}{2} \right) + (x - y)^2 < 0 \Leftrightarrow a^4 + 2a^2(x+y) + (x-y)^2 < 0$. Допускаме $x + y \geq 0$ и получаваме $a^4 + 2a^2(x+y) + (x-y)^2 \geq 0$, което е противоречие. Следователно $x + y < 0$. Нека $a^2 = z$. Получаваме, че квадратното неравенство $z^2 + 2z(x+y) + (x-y)^2 < 0$ има решение. Това е възможно само тогава, когато дискриминантата му е положителна. Т.е. $16xy > 0 \Leftrightarrow xy > 0$. От $x + y < 0$ и $xy > 0$ следва $x < 0$ и $y < 0$. Така получаваме, че всяко от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ има реални и различни корени.

Представените идеи за решаване на задачи, свързани с квадратно уравнение, квадратно неравенство, разположение на корените на квадратен тричлен и приложението им създават предпоставки за избор на рационален начин, който дава възможност на кандидат-студентите да организират най-добре времето си на изпита, за да приложат знанията си по математика в конкретните решения.

Цеца Илиева Байчева
ПМГ „В. Друмев“
ул. „В. Благоева“ 10
5000 Велико Търново
e-mail: zezab1@gmail.com

ANALYSIS OF THE CONNECTED WITH A QUADRATIC FUNCTION PROBLEMS FROM THE 2007 UNIVERSITY ENTRANCE EXAM

Tsetsa Ilieva Bycheva

The present work contains author's thoughts and ideas about some effective ways for solving 2007 university entrance exams problems that use quadratic equations, quadratic inequalities and location of the roots of quadratic trinomials.