

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2008
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2008
*Proceedings of the Thirty Seventh Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2008*

АНАЛИЗ НА СТАТИСТИЧЕСКИ ДАННИ ОТ
ИНТЕРВАЛЕН ТИП ЗА ЦЕЛИТЕ НА ОБУЧЕНИЕТО ПО
МАТЕМАТИКА

Йорданка Г. Горчева

Преподавателите по математика ежедневно получават количествени данни за успеха на своите ученици. Оценки от интервален тип на знанията на учащите се отразяват субективното мнение на преподавателите и отчитат детайли, които могат да убягнат при строго количествените методи за измерване. Това ги прави своеобразно свързващо звено между количествените данни и данните, с които се работи в качествената теория. В настоящата работа се демонстрира метод за статистическа обработка на оценки от интервален тип на знанията по математика. За примери от собствени изследвания са апроксимирани средната стойност, медианата и стандартното отклонение и са анализирани хистограмите за относителните честоти. Методът може да се използва от преподавателите за анализ на преките им наблюдения върху усвояването на учебното съдържание и за подобряване на учебния процес.

Увод. Количествените показатели са утвърдена мярка за ефективността на обучението по всички дисциплини. Сред тях са и оценките на учениците. Те дават представа както за степента на усвояване на учебното съдържание, така и за методиката на преподаване. Тяхната средна стойност е основа за формиране на крайната срочна или годишна оценка на учениците. Средно аритметичното от оценките на учениците в класа е показател за нивото на знания в този клас. Практикува се и външно оценяване в по-широк мащаб от национални и международни институции.

Теоретична постановка. Настоящото изследване предлага метод за анализ на статистически данни от интервален тип, каквито се срещат в обучението не само по математика, но и по други предмети. Чрез тестове, изпитване, работа на дъската или в тетрадките, в диалог, дискусии и пр., учителите преценяват знанията на кои ученици са за отличен, т.е. между 5,5 и 6, на кои – за много добър, т.е. между 4,5 и 5,5 и т.н. Данни от интервален тип се срещат и в производствената сфера, финансите, археологията и др. За определяне на характеристиките на центъра при такива извадки е уместен подходът на Attwood et al.[3], чието описание привеждам за данни от собствено изследване.

Пример 1. Учител преподава математика в девети клас на общо 108 ученици. Към средата на първия срок той преценил, че знанията на един ученик са за 2; двама ученици са за оценка от 2,5 до 3, но под 3; тринадесет – от 3 до 3,5 и под 3,5; двадесет и един – от 3,5 до 4 и под 4; двадесет и девет – от 4 до 4,5

и под 4,5; двадесет и четири – от 4,5 до 5 и под 5; дванадесет – от 5 до 5,5 и под 5,5; останалите шест ученици са за оценка от 5,5 до 6 (вкл. и краищата на интервала). Как може да се характеризира усвояването на учебния материал?

За да анализираме наблюденията в тази задача (108 оценки на ученици от интервален тип), ги разпределяме над взаимно непресичащи се интервали $\Delta_i, i = 1, \dots, 8$, чието обединение е интервалът от най-малката до най-голямата възможна оценка:

$\bigcup_{i=1}^8 \Delta_i = [2; 6]$ и $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ за $i \neq j$. За удобство систематизираме данните и междин-

ните пресмятания в таблица (Табл. 1), където с h_i , x_i и f_i сме означили съответно дължината, средната точка и честотата на наблюденията, попадащи в i -я интервал Δ_i . Използваната в таблицата апроксимирана средна стойност $\bar{x}$ на извадката е дефинирана по-долу в (1).

No. i	Интервал Δ_i	Дълж. h_i	Чест. f_i	Среда x_i	$f_i x_i$	Относит. честота	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
1	[2; 2,5)	0,5	1	2,25	2,25	0,009	4,16	4,1616
2	[2,5; 3)	0,5	2	2,75	5,5	0,019	2,3716	4,7432
3	[3; 3,5)	0,5	13	3,25	42,25	0,120	1,0816	14,0608
4	[3,5; 4)	0,5	21	3,75	78,75	0,194	0,2916	6,1236
5	[4; 4,5)	0,5	29	4,25	123,25	0,269	0,0016	0,0464
6	[4,5; 5)	0,5	24	4,75	114	0,222	0,2116	5,0784
7	[5; 5,5)	0,5	12	5,25	63	0,111	0,9216	11,0592
8	[5,5; 6]	0,5	6	5,75	34,5	0,056	2,1316	12,7896
Сбор:			108		463,5	1,000		58,0628

Табл. 1. Данни за пресмятане на средната оценка, медианата и стандартното отклонение на извадката от Пример 1.

Когато наблюденията са от интервален тип, средната стойност $\bar{x}$ на извадката е приблизителна и се изчислява по следната формула за групирани данни:

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 f_i x_i}{\sum_{i=1}^8 f_i} = \frac{463,5}{108} \approx 4,29.$$

Средната стойност $\bar{x}$ се влияе силно от най-ниските и най-високите стойности на наблюденията, затова е целесъобразно да се апроксимира и медианата Q_2 (втория квантил) на извадката. Конкретните числени стойности на наблюденията не са известни и наредбата им във възходящ ред е символична. Размерът на извадката е четно число, затова поредният “номер” $N = 54,5$ на медианата не е реално наблюдение. Той определя медианния клас – интервала $\Delta_5 = [a_5, b_5) = [4; 4,5)$. Приблизителната стойност на медианата на извадката е:

$$(2) \quad Q_2 = a_5 + \left(\frac{N - \sum_{i=1}^4 f_i}{f_5} \right) \cdot h_5 = 4 + \frac{54,5 - 37}{29} \cdot 0,5 \approx 4,30.$$

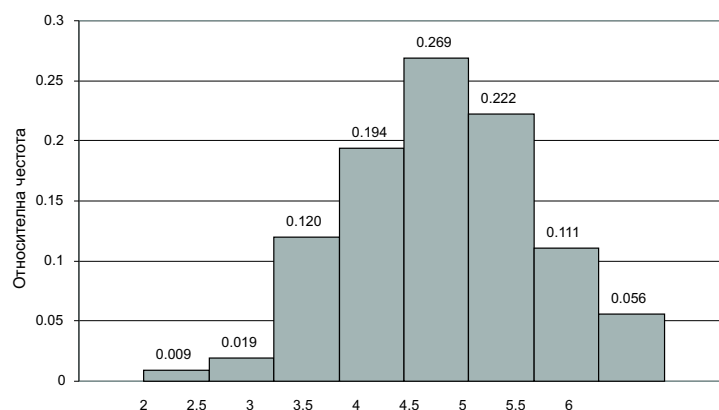
В разглеждания пример оценката на медианата $Q_2 \approx 4,30$ се различава незначително от апроксимираната средна стойност на извадката $\bar{x} \approx 4,29$.

Интерес представлява и определянето на аутлайърите, т.е. на необичайно ниски-те и необичайно високите стойности в извадката. За тяхната оценка се пресмятат предварително първия и третия квартил на извадката Q_1 и Q_3 . Те са медианите съответно на първата и на втората половина от данните, наредени във възходящ ред. Техните апроксимации $Q_1 \approx 3,77$ и $Q_3 \approx 4,82$ се получават аналогично на Q_2 . Според [3], аутлайъри са оценките, по-малки от числото $Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1) \approx 2,20$ или по-големи от $Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1) \approx 6,40$. Максималната възможна оценка е 6,00, поради което извадката не съдържа необичайно високи наблюдения. Следователно учителят може да определи за аутлайъри оценките от интервала $\Delta_1 = [2; 2,5)$ и тъй като $f_1 = 1$, да потърси индивидуален подход за обучението на попадащия там ученик.

Дисперсията s^2 и стандартното отклонение s , апроксимирани по [3], са:

$$(3) \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 f_i(x_i - \bar{x})^2}{(\sum_{i=1}^8 f_i) - 1} = \frac{58,0628}{107} \approx 0,5426; \quad s \approx 0,74.$$

Интервалът $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (3,55; 5,03)$ съдържа 74 наблюдения, които са около 68,5% от извадката. Хистограмата на разпределението, построена за относителните честоти (Фиг. 1), наподобява нормалното разпределение и показва, че учебният процес протича обичайно.



Фиг.1. Хистограма на разпределение на оценките от Пример 1

Приложения. Процесът на преподаване и усвояване на материала по математика не винаги протича според очакванията на учителя и учениците.

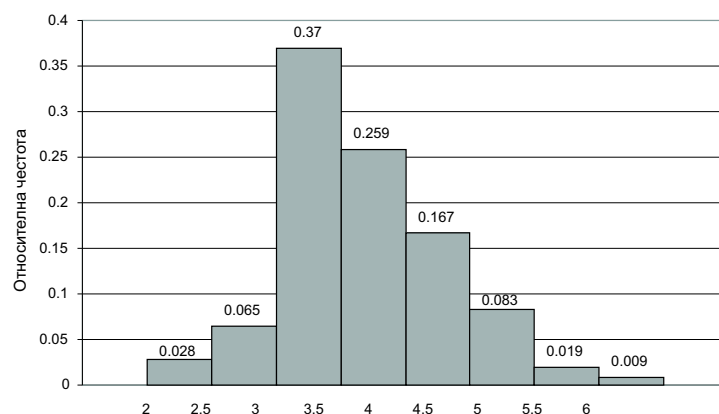
Ето пример за такава констатация след завършване на раздел от учебника:

Пример 2. Учител по математика преподава на 108 деветокласници. Според него, оценките на знанията на учениците са в следните интервали:

Интервал	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)	[5; 5,5)	[5,5; 6]
Честота	3	7	40	28	18	9	2	1

Как може да се характеризира усвояването на учебния материал?

След прилагане на описания метод се получават апроксимациите: средна стойност $\bar{x} \approx 3,66$; медиана $Q_2 \approx 3,58$; първи квартил $Q_1 \approx 3,22$; трети квартил $Q_3 \approx 4,10$, а числата, с които се определят аутлайърите, са 1,90 и 5,42. Тъй като най-малката възможна оценка е 2,00, числото 1,90 не може да служи за определяне на аутлайъри, т.е. в извадката няма необичайно ниски наблюдения. Стойността 5,42 дава основание на учителя да интерпретира като аутлайъри и трите наблюдения в интервала [5; 6]. Апроксимираната дисперсия е 0,42, стандартното отклонение е 0,65. Интервалът $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (3,02; 4,31)$ съдържа 86 наблюдения, които са около 79,6% от извадката.



Фиг. 2. Хистограма на разпределение на оценките от Пример 2

Хистограмата на Фиг. 2 показва, че разпределението е несиметрично и е изместено наляво. Това е указание за преподавателя да внесе промени в начина на преподаване, тъй като значителна част от учениците (около 46,3%) са с оценки, по-ниски от 3,5.

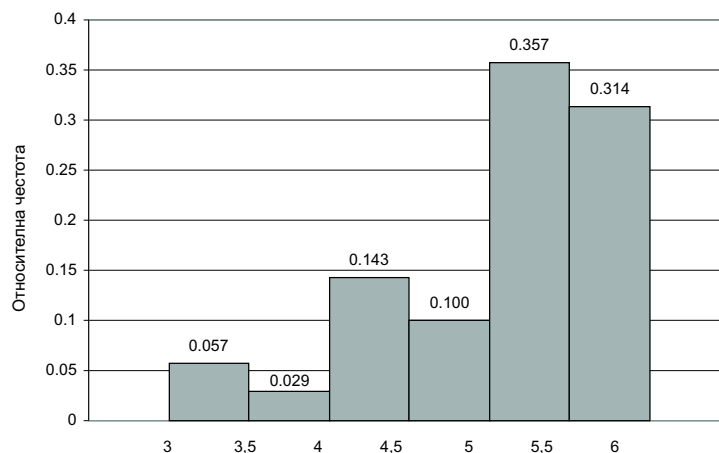
В следващия пример прилагаме описания метод за анализ на реални данни от интервален тип, получени през учебната 2006-2007 година в рамките на педагогически експеримент. Той бе проведен със студенти от Факултета по начална и предучилищна педагогика при СУ "Св. Климент Охридски" под надслов *Писмената реч като средство за разбиране и генериране на математически идеи* [1,2].

Пример 3. При проведен експеримент преподавателят е поставил следните оценки за знанията по математика на 70-те участници:

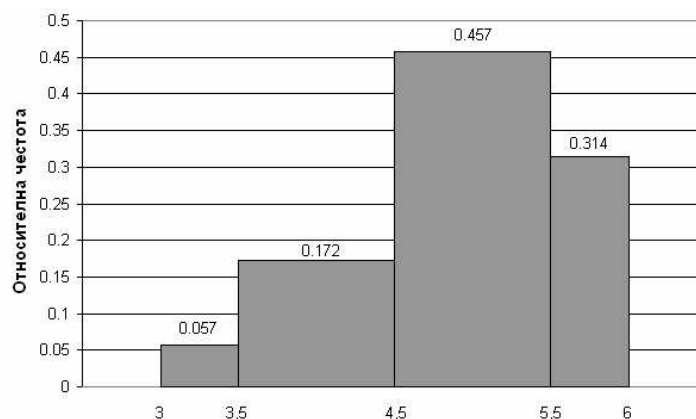
Интервал	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)	[5; 5,5)	[5,5; 6]
Честота	4	2	10	7	25	22

Как може да се характеризира усвояването на учебния материал?

Апроксимираните средна стойност $\bar{x}$ и медиана Q_2 на извадката са съответно 5,06 и 5,25. Апроксимациите на първия и третия квартил са съответно 4,54 и 5,61. Аутлайъри би трябвало да бъдат наблюденията под 2,94, каквито не съществуват сред измерванията, и над 7,22, каквито също няма в извадката, тъй като максималната възможна оценка е 6,00. Оттук следва, че цялостното представяне на студентите е много добро към отлично и отличните оценки не са изключение. Стойностите



Фиг. 3. Хистограма на разпределение на оценките от Пример 3

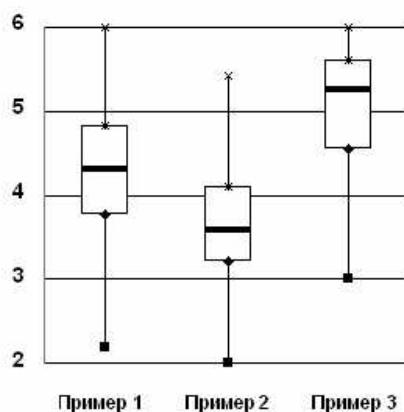


Фиг. 4. Хистограма на разпределение на оценките от Пример 3, построена за друг избор на интервалите

$s^2 \approx 0,51$ и $s \approx 0,71$ в този пример са почти равни на апроксимираните дисперсия и стандартно отклонение, получени в *Пример 1* за нормално разпределена и с голям размер извадка, което потвърждава адекватността на оценките на студентите и на методиката, използвана в педагогическия експеримент.

На Фиг. 3 е изобразена хистограмата на разпределението на оценките. Тя е несиметрична. По-голямата част от наблюденията са съсредоточени надясно, което показва положителния ефект от експеримента. Характерните “стъпала” се дължат на прецизните интервали на оценяване, използвани при тази сравнително неголяма извадка. Ако интервалите на оценяване се укрупнят, то успехът на студентите може да се опише и качествено с категориите среден, добър, много добър, отличен. Ефектът върху хистограмата е показан на Фиг. 4, а интерпретацията ѝ е следната: типичните студенти (45,7%) имат знания в интервала много добър, по-малък процент – за отличен (31,4%) и за добър (17,2%) и едва 5,7% – за среден.

На Фиг. 5 са показани диаграмите от тип “кутия” (box-plots) за извадките в *Пример 1*, *2* и *3*. Всеки правоъгълник съдържа наблюденията, разположени между първия и третия квантил на съответната извадка, а плътната хоризонтална отсечка указва стойността на медианата върху вертикалата на оценките.



Фиг. 5. Диаграма тип кутия (box-plot) за Пример 1, 2 и 3

Вместо заключение. Оценяването на знания чрез числови интервали, въпреки заложената вариативност, има и преимущества. За разлика от повечето строго количествени методи, то отчита и субективния фактор – мнението на преподавателя. В този смисъл, оценяването на знания посредством числови интервали е своеобразно свързващо звено между обективните количествени данни и субективните данни, с които се работи в качествената теория, а статистическият им анализ дава обобщена картина на учебния процес, която допринася за неговото усъвършенстване.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. ГОРЧЕВА, З. ЛАЛЧЕВ, Й. ТАБОВ. Обучението по математика: хуманитарен подход в компютърната ера. *Математика и математическо образование*, **35** (2006) 104–114.
- [2] Й. ГОРЧЕВА. Приказната форма на математическите задачи като стратегия за успех. Доклади на Четвъртата есенна научна конференция на Факултета по начална и предучилищна педагогика, Китен, 18–22 септември 2006, 274–279.
- [3] G. ATTWOOD, G. SKIPWORTH, G. DYER. *Statistics*. Heinemann, Oxford, 2004.

Йорданка Горчева
 Институт по математика и информатика при БАН
 Ул. “Акад. Г. Бончев” бл. 8
 1113 София, България
 e-mail: gorcheva@math.bas.bg

ANALYSIS OF INTERVAL TYPE STATISTICAL DATA FOR THE PURPOSES OF MATHEMATICS EDUCATION

Iordanka G. Gortcheva

Mathematics teachers assess the level of their students' knowledge by means of various quantitative data. Students' marks that belong to prescribed intervals but do not have strict numerical values may reflect teachers' subjective opinion and take into account details that could escape from the rigorous quantitative methods of measurement. Thus, the interval type students' grades can be considered as a link between the quantitative and qualitative data. A method for analysis of such interval type statistical data gathered through own research in education is demonstrated. Samples of students' grades are analyzed, and the estimates of the mean, median and standard deviation are discussed. To obtain an adequate interpretation of the results, frequencies histograms and box-plots diagrams are used. The method can be applied by teachers to analyze their firsthand professional observations and to improve the quality of education.