

## ЕДНА ЗАВИСИМОСТ, ПОРОДЕНА ОТ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

Сава Ив. Гроздев, Веселин Н. Ненков

С помощта на компютърната програма THE GEOMETER'S SKETCHPAD е открито едно ново свойство на коничните сечения, които са вписани в многоъгълници. Статията е посветена на методиката на избрания изследователски подход и строгото математическо доказателство на това свойство.

**1. Увод.** Добре известно е, че един от ефективните начини за изучаване и осмисляне на геометрични понятия и принципи е използването на интерактивната и динамична компютърна програма THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP). Както твърди Giamatti [1, с. 456], “GSP дава възможност да се изследват както прости, така и значително сложни теореми и зависимости в геометрията”. Едно от най-ценните приложения на програмата е свързано с реализацията на сценарии за конструкции, както и с получаването на отговор на въпроса дали тези конструкции водят до специални случаи или до откриване на обобщения. GSP е истински помощник в преподаването и ученето, защото “силата на GSP в комбинация с неоспоримото математическо доказателство дава пълна илюстрация на това как се “прави” математика” [1, с. 458]. Тъй като GSP е сравнително нова програма, публикациите с описание на съдържателни нейни приложения не са много. В тази връзка ще споменем [2], където е направен изводът, че учениците, ползващи GSP, регистрират значително високи резултати върху тестове, включващи понятията симетрия и ротация. В [3] са показани 3 примера на позитивна реакция от страна на ученици и учители при тестване на хипотези и конструкции. Ще споменем още работите [4] и [5], както и по-новите [6] и [7]. Ясно е, че използването на GSP осигурява добър шанс за осъществяване на симулации, които се доближават до реални математически ситуации.

**2. Схема на методиката на използвания изследователския подход.** Настоящата статия доказва възможностите на GSP за реализация на евристичен подход при откриване на твърдения в планиметрията. Подходът е приложен за извеждане на едно свойство на коничните сечения, които са вписани в многоъгълници, или което е същото, на едно свойство на многоъгълниците, описани около конични сечения. Един от най-известните познавачи на евристичния подход в математиката е американският математик и педагог от унгарски произход Дьорд Пойа (1887–1985), а една от първите книги по евристика е на древногръцкия математик Пап Александрийски (290–350). Заглавието на книгата е “Съкровищница на анализа” или “Изкуството

да се решават задачи”, което Пойа не случайно превежда като “Евристика”. Според Пойа [8], евристиката се отнася едновременно до логиката, философията и психологията. Основният принос на [8] е в предложените правила, които в случай, че бъдат следвани, могат според автора да доведат до откритие или съответно до решаване на дадена математическа задача. Няма да се спираме на всички тези правила, но като съществено ще отбележим, че схемата на Пойа се базира преди всичко на *опита*. От своя страна, натрупването на опит в науката става с методично извършване на *наблюдения* над обектите на изследване. Всичко това осигурява *възможност за подбор*, която е един от най-важните елементи на евристичното мислене и подготвя досещането. Именно тук е ролята на компютъра за натрупване на информация и нейното обработване. Но евристиката не се заключава в пълното осъзнаване на съществуващата информация, т.е. в изследване на всички възможни варианти. В действие влизат процесите на *филтрация* и *компарация*. Това означава съответно последователно отделяне на вариантите, които не удовлетворяват критериите на изработен за целта еталон. Тук отново решаващ е опитът. Методът, с помощта на който имаме работа с опита, обикновено се нарича *индукция* [9]. Индукцията е метод, с помощта на който се извършва целенасочено наблюдение и се натрупват свързани помежду си резултати.

Съгласно Пойа [9], първият стадий на индукцията се характеризира с т. нар. *насочващи действия*, чиято цел е формулиране на пробно твърдение. Насочващите действия включват не само наблюденията и подбора, но и откриването на *сходство* между различните случаи в съответствие с разглежданите свойства. Установеното сходство се пренася върху *родствени* по определен признак обекти и по този начин се реализира трансфер на свойствата. Съществена е *аналогията*, която по естествен начин довежда първоначалната ситуация до нейно *обобщение* и до формулирането на *пробно твърдение*. Пробното твърдение обаче, не може да се приеме на доверие, че е вярно. Нужно е то да бъде доказано или опровергано. За целта твърдението се подлага на *изпитване* в случаите, които не са били разгледани в процеса на неговото извеждане. Идва ред на *подкрепящите действия*, които характеризират втория стадий на индукцията [9]. Евентуален неблагоприятен резултат от подкрепящите действия води до отхвърляне на пробното твърдение, а благоприятните го превръщат в *правдоподобно твърдение*. Всеки следващ благоприятен резултат прави правдоподобното твърдение още *по-правдоподобно* [9] (при условие, че дотогава не се е появил неблагоприятен резултат).

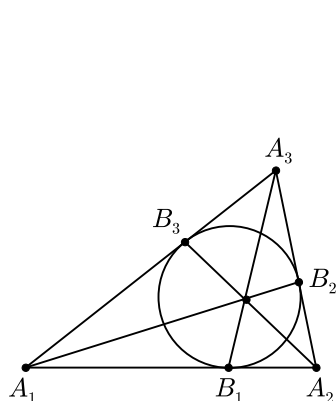
Чрез индуктивните действия по схемата на Пойа е възможно откриването на интересни и дори неизвестни до този момент закономерности или свойства. При това използването на компютър не само ускорява проверките в установените конфигурации, но участва активно и в създаването на тези конфигурации. Формулираното твърдение обаче, макар и да се е оказало *по-правдоподобно*, не може да се приеме за истинно, само защото е потвърдено от конкретните примери (колкото и много да са те). Следващият и последен стадий е стриктното математическо доказателство. Едва тогава завършва целият процес по създаването на съответното твърдение. Описаният изследователски подход е приложен за обобщаване на една известна теорема от геометрията на триъгълника, като в резултат на това е открито едно неизвестно досега свойство на коничните сечения, които са вписани в многоъгълници. Компютърната реализация на формулровката на това свойство е с помощта на програмата

GSP. Свойството е доказано и строго математически.

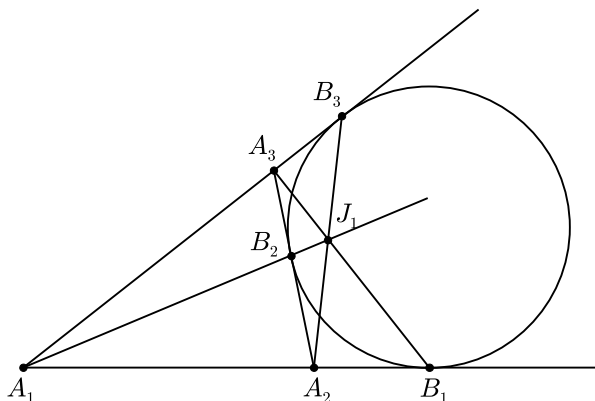
### 3. Зависимост, породена от вписани в триъгълник конични сечения.

Нека  $A_1A_2A_3$  е произволен триъгълник, а точките  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  са допирните точки на вписаната в  $\triangle A_1A_2A_3$  окръжност съответно със страните  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  и  $A_3A_1$ . Известно е следното твърдение:

- (1) Правите  $A_1B_2$ ,  $A_2B_3$  и  $A_3B_1$  се пресичат в една точка  $J$ .



Черт. 1



Черт. 2

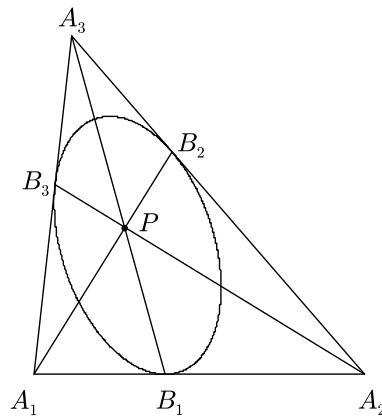
Точката  $J$  е известната *точка на Жергон* (Черт. 1) [10], а пресичането на споменатите прави е еквивалентно, според теоремата на Чева [10] с равенството:

$$(2) \quad \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_1}} \cdot \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_2}} \cdot \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_1B_3}} = -1.$$

Триъгълникът  $A_1A_2A_3$  обаче има и три външно вписани окръжности. Затова възниква въпросът дали съществуват аналогични връзки, когато точките  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  са допирните точки на външно вписана за  $\triangle A_1A_2A_3$  окръжност съответно със страните  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  и  $A_3A_1$ . Построенията, извършени с програмата GSP, потвърждават подозрението. Оказва се, че ако заменим вписаната окръжност с коя да е външно вписана окръжност, правите  $A_1B_2$ ,  $A_2B_3$  и  $A_3B_1$  се пресичат отново в една точка (Черт. 2). Така, при извършената замяна се запазват свойствата (1) и (2).

Да обърнем внимание, че вписаните (вътрешно и външно) окръжности за  $\triangle A_1A_2A_3$  са само четири елемента от безкрайното множество на коничните сечения, допиращи се до правите  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  и  $A_3A_1$ . Следователно по естествен начин възниква идеята за продължаване на направените наблюдения. Затова ще заменим окръжностите с произволно конично сечение  $k$ . Точките  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  ще разглеждаме като допирни точки на  $k$  съответно с правите  $A_1B_2$ ,  $A_2B_3$  и  $A_3B_1$ . Експериментите с програмата GSP върху различни конични сечения, вписани в  $\triangle A_1A_2A_3$ , показват, че твърдение (1) се запазва. Нещо повече, то остава в сила независимо от вида на  $\triangle A_1A_2A_3$  и вида на  $k$  – елипса, хипербола или парабола. Имаме основание да формулираме следното твърдение:

- (3) Ако страните  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  и  $A_3A_1$  на даден  $\triangle A_1A_2A_3$  се допират до конично сечение  $k$  съответно в точките  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ , то правите  $A_1B_2$ ,  $A_2B_3$  и  $A_3B_1$  се пресичат в една точка (Черт. 3).

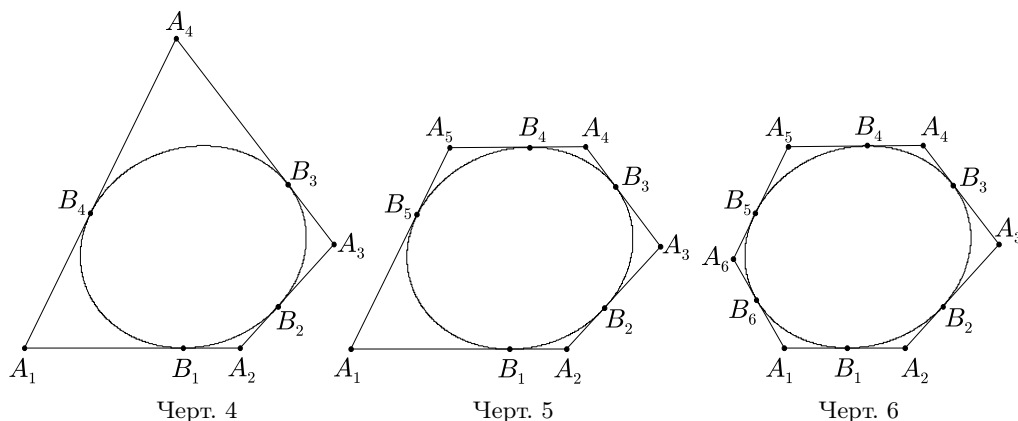


Черт. 3

Ясно е, че поради теоремата на Чева свойство (2) е изпълнено като следствие от (3). Сега да анализираме последователността, в която бяха получени формулираните дотук резултати. Започнахме с позната ситуация, свързана с точката на Жергон за даден  $\triangle A_1A_2A_3$  (Черт. 1). Насочихме се към *наблюдение* на поведението на точките  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  във връзка със свойствата (1) и (2). Първоначално проведохме *наблюдението* върху външно вписаните окръжности (Черт. 2), които са *сходни* с вътрешно вписаната окръжност. Оказа се, че получаваме *сходни* свойства на (1) и (2). Установеното *сходство* пренесохме върху конични сечения, които са *родствени* на окръжностите (Черт. 3). По този начин получихме едно *обобщение*, което като краен за момента резултат доведе до *пробното твърдение* (3). Да отбележим, че *изпитването* на (3) се извършва с много частни случаи, които се получават в такова голямо и динамично количество благодарение на използването на програмата GSP. При това изпитване твърдението се потвърждава и то се превръща в *правдоподобно*. Голямото множество от потвърждаващи случаи правят (3) не само *по-правдоподобно*, но дори създават впечатлението, че неговата достоверност е доказана. Разбира се, ярката геометрична демонстрация не може да се приеме за доказателство. За да се получи пълна коректност, трябва да се приведе строго доказателство. Едно такова доказателство може да се получи, като се използва добре известната теорема на Брианшон [11].

**4. Зависимост, породена от вписано в многоъгълник конично сечение.** Твърдение (3) и свързаното с него равенство (2) се отнасят до конично сечение, вписано в триъгълник. Естествено е да се потърсят подобни свойства и за многоъгълник.

1. Нека  $A_1A_2A_3A_4$  е четириъгълникът, който се получава от пресичането на произволни прави  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$  и  $A_4A_1$ , допиращи се до дадено конично сечение  $k$  съответно в точките  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$  (Черт. 4). Ясно е, че тук не можем да търсим четири прави, построени както в (3) така, че да минават през една точка, защото върховете на  $A_1A_2A_3A_4$  нямат срещуположни страни. Можем обаче да потърсим равенство, подобно на (2). За целта в програмата GSP построяваме конично сечение  $k$  и четириъгълник  $A_1A_2A_3A_4$  по допирните му точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$  с  $k$ . След това пресмятаме простите отношения, в които точките  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$  делят отсечките



$A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$  и  $A_4A_1$ , както и тяхното произведение. Установяваме следното свойство:

$$(4) \quad \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_1}} \cdot \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_2}} \cdot \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_4B_3}} \cdot \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_1B_4}} = 1.$$

Както и да променяме  $k$  и точките  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$ , забелязваме, че (4) не се променя.

**2.** Нека  $A_1A_2A_3A_4A_5$  е петогълник, получаващ се от пресичането на произволни прави  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_5$  и  $A_5A_1$ , които се допират до дадено конично сечение  $k$  съответно в точките  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  и  $B_5$  (Черт. 5). Тук може да се очаква, че правите  $A_1B_3$ ,  $A_2B_4$ ,  $A_3B_5$ ,  $A_4B_1$  и  $A_5B_2$  се пресичат в една точка, както това се случва в (3). Очакваме също и съотношение, което по някакъв начин прилича на (2) и (4). За да проверим тези предположения, в програмата GSP построяваме конично сечение  $k$  и петогълник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  по допирните му точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  и  $B_5$  с  $k$ . Първото нещо, което веднага установяваме, е, че правите  $A_1B_3$ ,  $A_2B_4$ ,  $A_3B_5$ ,  $A_4B_1$  и  $A_5B_2$  не се пресичат в една точка при произволен избор на точките  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  и  $B_5$ . Следователно, твърдение (3) не може да се обобщи като свойство на произволен многогълник с нечетен брой страни. Затова трябва да се откажем от изследването на обобщението на това твърдение.

Сега да пресметнем простите отношения, в които точките  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  и  $B_5$  делят отсечките  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_5$  и  $A_5A_1$ , както и тяхното произведение. Установяваме следното свойство:

$$(5) \quad \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_1}} \cdot \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_2}} \cdot \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_4B_3}} \cdot \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_5B_4}} \cdot \frac{\overline{A_5B_5}}{\overline{A_1B_5}} = -1.$$

**3.** Нека  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  е шестогълник, получаващ се от пресичането на произволни прави  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_5$ ,  $A_5A_6$  и  $A_6A_1$ , които се допират до дадено конично сечение  $k$  съответно в точките  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ ,  $B_5$  и  $B_6$  (Черт. 6). С помощта на програмата GSP, както и по-горе, установяваме равенството:

$$(6) \quad \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_1}} \cdot \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_2}} \cdot \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_4B_3}} \cdot \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_5B_4}} \cdot \frac{\overline{A_5B_5}}{\overline{A_6B_5}} \cdot \frac{\overline{A_6B_6}}{\overline{A_1B_6}} = 1.$$

Равенствата (2), (4), (5) и (6) ни дават достатъчно основания да формулираме следното:

**Твърдение 1.** Ако  $A_1A_2A_3 \cdots A_n$  ( $n \geq 3$ ) е многоъгълникът, получаващ се от пресичането на произволни прави  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  и  $A_nA_1$ , които се допират до дадено конично сечение  $k$  съответно в точките  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  и  $B_n$ , изпълнено е равенството

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_1}} \cdot \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_2}} \cdots \frac{\overline{A_{n-1}B_{n-1}}}{\overline{A_nB_{n-1}}} \cdot \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{A_1B_n}} = (-1)^n.$$

Ще анализираме последователността, в която беше получен формулираният в твърдение 1 общ резултат. Започнахме с разглеждане на една позната ситуация, свързана с допирните точки на конично сечение  $k$  и изразена с равенството (2) (Черт. 3). Насочихме се към *наблюдение* на поведението на допирните точки на  $k$  във връзка с тяхното свойство (2), но за многоъгълници със страни повече от три. Това наблюдение проведохме последователно върху множества от четириъгълници (Черт. 4), петъгълници (Черт. 5) и шестоъгълници (Черт. 6), които са описани за дадени конични сечения. Тези многоъгълници представляват ситуации, *сходни* на случаите с описани триъгълници. След това се оказа, че получаваме *сходни* на (2) свойства, изразени с равенствата (4), (5) и (6). Установеното сходство пренесохме върху всички  $n$ -ъгълници, които са описани около дадено конично сечение. Всеки такъв  $n$ -ъгълник е *родствен* с произволен триъгълник, описан около конично сечение. По този начин получихме *обобщение*, което като краен резултат доведе до *пробното твърдение*, формулирано по-горе.

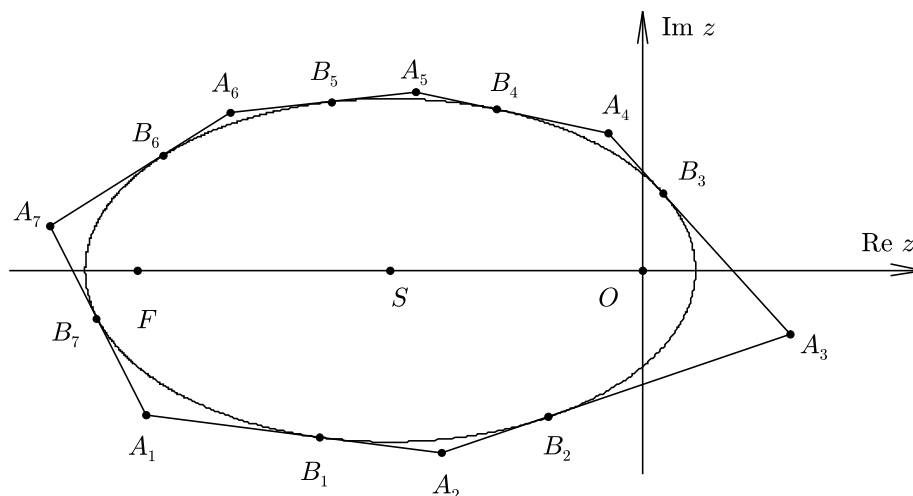
По-нататък да направим необходимите построения с програмата GSP и да проверим твърдение 1 при  $n = 7$  и  $n = 8$ . Установяваме, че то се потвърждава. Разгледачите нови частни случаи ни служат като *подкрепящи действия*, които извършваме, за да *изпитаме* твърдение 1. Резултатите от новите случаи правят формулираното твърдение *по-правдоподобно*.

**5. Доказателство на твърдение 1.** Нека  $k$  е конично сечение с фокален параметър  $p$ , числен ексцентрицитет  $e$  и фокус в точка  $O$ . През произволни точки  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  и  $B_n$  от  $k$  разглеждаме съответните допирателни  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  и  $A_nA_1$ , които образуват многоъгълник  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  (изпъкнал или не). Разглеждаме въведените геометрични обекти в комплексната равнина спрямо Гаусова координатна система, както това е показано на черт. 7. Спрямо тази координатна система, както е показано в [12], за афиксите на разглежданите точки са изпълнени равенствата:

$$(7) \quad b_j = \frac{2p}{e \cdot t_j^2 + 2 \cdot t_j + e} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$(8) \quad a_1 = \frac{2p}{e \cdot t_n t_1 + t_n + t_1 + e}, a_j = \frac{2p}{e \cdot t_{j-1} t_j + t_{j-1} + t_j + e} \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Тъй като простото отношение на произволни три точки  $A_k, A_l$  и  $B_j$  от една права се изразява с равенството  $\frac{\overline{A_k B_j}}{\overline{A_l B_j}} = \frac{a_k - b_j}{a_l - b_j}$ , от (7) и (8) след известни преобразувания



Черт. 7

се получават зависимостите:

$$(9) \quad \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_2 B_1}} = \frac{t_n - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{\overline{A_k B_k}}{\overline{A_{k+1} B_k}} = \frac{t_{k-1} - t_k}{t_{k+1} - t_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k+1}} \quad (k = 2, \dots, n-1),$$

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{A_1 B_n}} = \frac{t_{n-1} - t_n}{t_1 - t_n} \cdot \frac{a_n}{a_1}.$$

От (9) непосредствено следва равенството  $\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_2 B_1}} \cdot \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_3 B_2}} \dots \frac{\overline{A_{n-1} B_{n-1}}}{\overline{A_n B_{n-1}}} \cdot \frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{A_1 B_n}} = (-1)^n$ . С това твърдение 1 е доказано. Поради теоремата на Чева то води до доказателство и на (3).

**6. Заключение.** Ще отбележим, че описаната обща идея за получаване на нови по-общи твърдения беше реализирана в два варианта. Първото обобщение (3), което е еквивалентно на (2), беше получено за триъгълниците, като чрез аналогия постепенно стигнахме до вписани конични сечения. Второто обобщение, което се изразява с твърдение 1, стъпвайки на първото обобщение, беше проведено за коничните сечения по множеството на описаните около тях многоъгълници. В този случай приложихме и метода на математическата индукция по броя на върховете на описаните многоъгълници, но в не пълнен вид. Твърдение 1 е обобщение на (2), но не е обобщение на еквивалентното му (3) при нечетни  $n \geq 3$ . Може да се каже, че конкурентността на правите  $A_1 B_2$ ,  $A_2 B_3$  и  $A_3 B_1$  при  $n = 2m + 1$  не преминава в конкурентност на правите  $A_1 B_{m+1}$ ,  $A_2 B_{m+2}$ ,  $\dots$ ,  $A_{2m} B_{m-1}$  и  $A_{2m+1} B_m$  и затова споменатото свойство на триъгълника оказва "съпротива" (резистентност) към увеличаването на броя на върховете до получаването на многоъгълник с  $n \geq 5$  върхове. Същата конкурентност обаче е устойчива към промяната на коничното сечение, вписано в даден  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , защото както и да променяме коничното сечение  $k$ , вписано в  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , правите  $A_1 B_2$ ,  $A_2 B_3$  и  $A_3 B_1$  винаги се пресичат в една точка. От друга

страна твърдение 1, като обобщение на (2), изразява устойчивост на (2) както по отношение промяната на вписаното в даден триъгълник конично сечение, така и по отношение увеличаването броя на върховете на триъгълника до получаването на многоъгълник с  $n$  върха.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. GIAMATTI. Conjectures in Geometry and the Geometer's Sketchpad. *Mathematics Teacher*, **88**, No 6 (1995), 456–458.
- [2] J. DIXON. English Language Proficiency and Spatial Visualization in Middle School Students' Construction of the Concepts of Reflection and Rotation used the GSP, Dissertation Abstract International, DAI – A 56111, University of Florida, 1996.
- [3] M. GROWMAN. Integrating Geometer's Sketchpad into a Geometry course for Secondary Education Mathematics Majors, 29-th ASCUE Summer Conf. Proc., 1996, North Myrtle Beach, SC.
- [4] A. YOUSEF. The Effect of the GSP on the Attitude toward Geometry of High School Students, Dissertation Abstract International, DAI – A 58105, Ohio University, 1997.
- [5] M. LESTER. The Effects of the GSP Software on Achievements Knowledge of High School Geometry Students, Dissertation Abstract International, DAI – A 57106, University of San Francisco, 1996.
- [6] V. NENKOV. Some Loci Generated by a Type of Transformations in the Triangle Plane. *Mathematics Plus*, No 3 (2007), 67–70.
- [7] S. GROZDEV, V. NENKOV. Equisurface Triangles Generated by Conics. *Mathematics Plus*, No 4 (2007), 73–79.
- [8] Д. ПОЙА. Как решать задачу. Учпедгиз, Москва, 1961.
- [9] Д. ПОЙА. Математика и правдоподобные рассуждения. Наука, Москва, 1975.
- [10] Г. ПАСКАЛЕВ, И. ЧОБАНОВ. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.
- [11] А. МАТЕЕВ. Проективна геометрия. Наука и изкуство, София, 1977.
- [12] V. NENKOV. Conics Inscribed in Triangle. *Mathematics and Informatics*, No 5 (1998), 54–59.

Сава Гроздев  
Институт по Математика и Информатика  
Българска Академия на Науките  
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8  
1113 София  
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков  
Технически колеж Ловеч  
ул. Сърко Сърв № 31  
Ловеч  
e-mail: vnenkov@mail.bg

## A RELATION, GENERATED BY CONICS

Sava Ivanov Grozdev, Vesselin Nenkov Nenkov

By means of the computer software THE GEOMETER'S SKETCHPAD a new property is discovered concerning conics, which are inscribed in polygons. The paper considers the methodics of the chosen research approach and the strict mathematical proof of the established property.