

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2008
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2008
Proceedings of the Thirty Seventh Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2008*

**УЧЕБНИ ЗАДАЧИ ЗА ТРЕНИРАНЕ НА ЕДИН КЛАС
ДЕЙСТВИЯ С ОБЕКТИ**

Сава Ив. Гроздев, Тони К. Чехларова

Предложена е система от учебни задачи във връзка със синтеза и комбинираното използване на действията добавяне, отстраняване (елиминиране), преместване, смяна и размяна. Учебните задачи се разглеждат като структурни елементи на учебната дейност. Самите действия са насочени към основните (градивните) елементи на съответните обекти – числа в случая на редици, единични квадратчета или единични кубчета в случая на равнинни фигури и конструкции от кубчета и т.н. Повечето задачи могат да бъдат използвани в кръжочни и извънкласни дейности по математика за обучение на ученици и от долните класове.

През 1996 г. Министерството на образованието на Руската федерация одобрява т. нар. система на Д. Б. Елконин и В. В. Давидов за развиващото обучение като една от трите основни държавни системи в началното образование на страната. За по-нататъшното разработване на системата, група учени, между които споменатите автори Елконин (посмъртно) и Давидов, получават президентска премия през 1998 г., а през 2000 г. започва въвеждането на въпросната система в средните училища. Основно място в системата на Д. Б. Елконин и В. В. Давидов за развиващото обучение заема учебната дейност, а в учебната дейност основна роля играе учебната задача. Д. Б. Елконин [1] счита учебната задача за една от най-важните структурни компоненти на учебната дейност. Нейни взаимно свързани елементи са учебните цели и учебните действия. Съгласно В. В. Давидов [2], “учебната задача е единство на целите на действията и условията на тяхното постигане”. От друга страна, на макро равнище основните елементи на дейността, съгласно А. Н. Леонтиев [3], са действията и операциите. Оттук следва пряката връзка между учебните задачи и действията, които поотделно подчинени на съзнателни цели подготвят и съответно осъществяват дейностите, в т.ч. и учебната дейност. Самата учебна дейност е насочена към решаването на учебни задачи, чиято съществена характеристика е да даде възможност на учениците да овладеят обобщени теоретични средства за решаване на определени класове конкретно-частни задачи. Всяка добре формулирана учебна задача поставя обучаващия се в ситуация, която изисква ориентация относно обобщения способ за нейното решаване в най-разнообразни конкретни случаи. Съгласно Д. Б. Елконин [1], “учебната задача е съставена от основни и взаимно свързани структурни елементи на учебните цели и учебните действия”.

В няколко последователни публикации ([4], [5], [6]) авторите на настоящата статия разглеждат действията добавяне, отстраняване (елиминация), преместване, смяна и размяна като основни в дейността решаване на задачи. Предложените в тези публикации дидактически системи имат обучаващ характер за овладяване и усъвършенстване на първите три от споменатите действия. Следваща стъпка е усъвършенстване на системите чрез включване на по-сложни примери за приложение на петте действия, включително и примери на комбинираното им използване. На една възможна реализация на тази стъпка е посветена настоящата статия. Избраните форми са учебни задачи, които не само обединяват всичките или част от споменатите пет действия и тренират използването им, но осигуряват също инструментариум при подготовката за успешно осъществяване на дейността решаване на задачи в нестандартни ситуации. Предложените задачи имат за цел изменението на субекта на дейността, а не на нейния предмет, като очакванията са, че резултатът от изучаването им ще съвпадне с целта. При това се има предвид овладяване на съответни знания и умения, които развиват личностните качества в посока превръщане на ученика от обучаван в самостоятелно обучаващ се. Авторите силно се надяват, че тези задачи ще помогнат да се осъзнае целта и на учебната дейност, което от своя страна би повлияло на формирането на положителни мотиви. В тази връзка ще отбележим, че важни са не външният вид на задачите и особеностите на условията им, а подходът и отношението към тях.

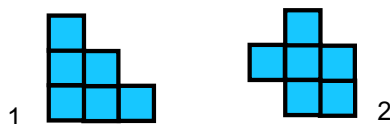
Задача 1. Разполагате с 10 еднакви кибритени клечки, като 9 от тях са включени в следното грешно равенство:

$$V - I = VI$$

Получете вярно равенство с помощта на едно действие с една от клечките.

Решение: Възможните действия в тази задача са добавяне, отстраняване и преместване. Смяната и размяната са неприложими, защото клечките са еднакви и кое да е от тези действия не променя конфигурацията. Отстраняване на една клечка по принцип е възможно, но в конкретния случай това не води до резултат. Причината е в очевидното изискване за запазване структурата на обектите. Например, отстраняването на една от клечките в запис на цифрата 5 води до безсмислица. Аналогично е и със запис на знака за равенство, като единствената възможност за отстраняване е при запис на числото 6 (при запис с римски цифри 6 е число). Последното обаче води до $5 - 1 = 5$, което не е вярно. Така стигаме до ограничението да се ползват само действията добавяне и преместване. При първото от тях получаваме $5 + 1 = 6$, а при второто $6 - 1 = 5$ или $5 - 1 = 4$.

Задача 2. Дадени са 13 единични квадратчета и с 12 от тях са образувани показаните фигури 1 и 2.

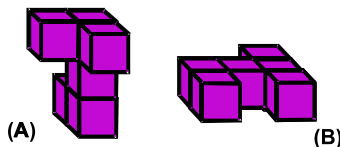


От едната фигура да се получи другата чрез едно действие с едно единично квадратче.

Решение: Двете фигури са с по 6 единични квадратчета, поради което действията добавяне и отстраняване не водят до резултат. Смяната и размяната са неприложими, защото единичните квадратчета са еднакви и кое да е от тези действия не променя съответната фигура. Едно решение на задачата се получава, ако се премести най-дясното квадратче на долния ред във фигура 1.

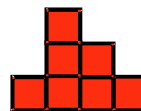
Задача 3. Дадените две конструкции (А) и (В) са съставени от единични кубчета. От едната да се получи другата чрез едно действие с едно единично кубче.

Решение: Двете конструкции са с по 6 единични кубчета и затова решения чрез добавяне или отстраняване са невъзможни. Смяната и размяната са също неприложими, защото единичните кубчета са еднакви и кое да е от тези действия не променя съответната конструкция. Остава единствено действието преместване, което лесно се вижда, че води до резултат.



Задача 4. Дадената фигура е съставена от единични квадратчета. С кое от посочените действия не може да се получи симетрична фигура:

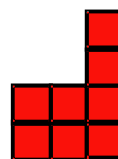
- А) добавяне на единично квадратче;
- Б) елиминирание на единично квадратче;
- В) преместване на единично квадратче;
- Г) размяна на две единични квадратчета?



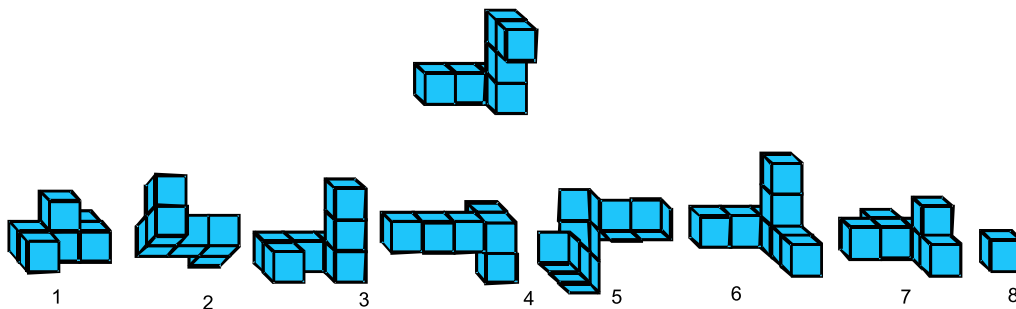
Отговор: Г)

Задача 5. Дадени са 9 единични квадратчета и с 8 от тях е образувана показаната фигура. От фигурата с помощта на едно действие с едно единично квадратче получите симетрична фигура.

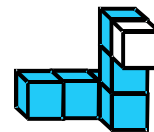
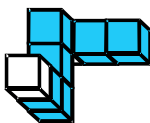
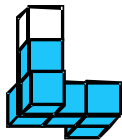
Решение: Както и при решението на задача 2 заключаваме, че действията смяна и размяна са неприложими (размяната не се допуска и по условие). Ако се премести най-горното квадратче от третия стълб (с 4 единични квадратчета) и се постави най-отгоре върху левия стълб, получената фигура е симетрична. С добавяне или отстраняване не може да се получи симетрична фигура.



Задача 6. С помощта на кои от номерираните конструкции от единични кубчета може да се получи неномерираната, ако са разрешени действия само с едно единично кубче?



Решение: Ще разделим конструкциите на групи в зависимост от броя на съставлящите ги единични кубчета. В първата група влизат конструкциите с по 6 единични кубчета, т.е. конструкциите с номера 1, 2 и 4. Във втората група влизат конструкциите с по 7 единични кубчета, т.е. тези с номера 3 и 7. В третата група са конструкциите с номера 5 и 6, които са с по 8 единични кубчета. В отделна група е единичното кубче 8. Ясно е, че то може да бъде използвано само в комбинация с някоя от конструкциите в първата група, защото неномерираната конструкция съдържа 7 единични кубчета. В този случай е необходимо прилагане на действие “добавяне”. Осъщественото групиране насочва и към останалите възможни действия при решаване на задачата: “преместване” за втората група и “отстраняване” за третата. Чрез опитване установяваме, че добавянето на единичното кубче 8 води до резултат само с използване на конструкция 2. Решението е показано вляво, като добавеното единично кубче е осветено. Действие “отстраняване” за третата група води до резултат само за конструкция 5. Решението е показано вляво, като отстраненото кубче е осветено. Преместване за втората група е възможно само при конструкция 3 и решението е показано вдясно.

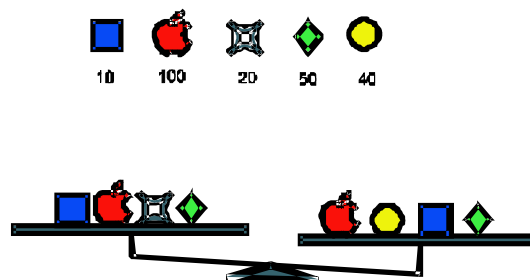


Задача 7. Да се получи четен сбор, ако по отношение на израза $23 + 44 + 62$ е разрешено едно действие с едно число.

Решение: Понеже сборът $23 + 44 + 62 = 129$ е нечетно число, то добавянето на нечетно събирамо ще го превърне в четен. Отстраняването на 23 също води до резултат. Сборът става четен, ако се осъществи смяна на кое до е от събираемите с число с различна четност, т.е. смяна на 23 с четно число или смяна на една от числата 44 и 62 с нечетно число. Да обърнем внимание, че четвъртото възможно действие преместване не води до резултат. Петото възможно действие размяна също не води до резултат, като то отпада и по формални причини (заради условието в задачата).

Задача 8. С помощта на показаните тежести върху везната и тези извън нея получите равновесие на везната, като използвате само едно действие. Стойностите на тежестите върху везната съответстват на показаните.

Решение: Понеже общото тегло върху лявото блюдо е 180, а това върху дясното е 200, не е възможно да се получи равновесие чрез отстраняване на тежест от дясното блюдо (върху него няма тежест 20). Не е възможна и размяна на две тежести, защото това означава, че трябва някоя тежест от лявото блюдо да се размени с тежест от дясното, която да е с 10 по-тежка (няма такава тежест върху дясното блюдо).



Едната възможност за получаване на равновесие е чрез добавяне на 20 върху лявото блюдо. Втората е чрез преместване на тежестта 10 от дясното блюдо върху лявото, а третата е чрез смяна на тежестта 20 от лявото блюдо с тежестта 40 от тежестите извън везната. Действието смяна реализира равновесие и ако тежестта 40 от дясното блюдо се смени с тежестта 20 от тежестите извън везната.

Задача 9. С помощта само на едно действие с едно число да се получи геометрична прогресия от числовата редица 1; 4; 8; 16.

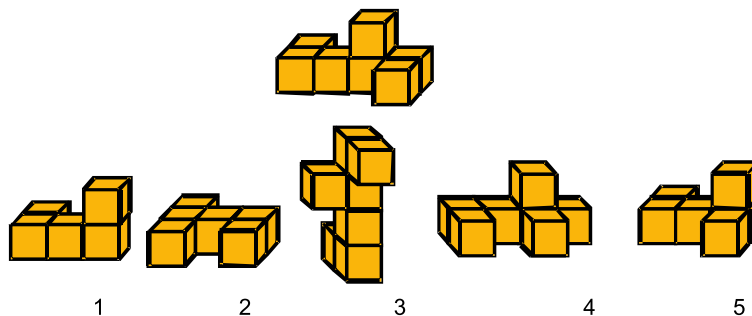
Решение: Редицата от частните на последователните членове на редицата е 4; 2; 2. Понеже е разрешено само едно действие, търсената геометрична прогресия трябва да има частно 2 или частно 4. Една възможност е чрез добавяне на числото 2 след числото 1, което води до прогресията 1; 2; 4; 8; 16. Друга възможност е чрез отстраняване: например, на първия член на дадената редица. Сега се получава прогресията 4; 8; 16. След отстраняване на числото 8 се получава прогресията 1; 4; 16. Трета възможност е чрез смяна на първия член с 2, при което се получава прогресията 2; 4; 8; 16. Действието размяна не е разрешено по условие, а чрез преместване не е възможно да се получи геометрична прогресия. Последното следва от факта, че дадените числа са в нарастващ ред и преместването на кой да е член ще наруши това свойство.

Следващите 2 задачи са с повече действия, които се извършват последователно.

Задача 10. Дадена е буквената наредба от карти $\boxed{\text{М}} \boxed{\text{А}} \boxed{\text{Г}} \boxed{\text{Р}} \boxed{\text{И}} \boxed{\text{О}}$. Намерете възможно най-малкия брой действия, с които от тази наредба се получава думата $\boxed{\text{И}} \boxed{\text{Г}} \boxed{\text{Р}} \boxed{\text{А}} \boxed{\text{Ч}}$.

Решение: Двойката карти $\boxed{\text{Г}} \boxed{\text{Р}}$ участва както в дадената буквена наредба, така и в думата $\boxed{\text{И}} \boxed{\text{Г}} \boxed{\text{Р}} \boxed{\text{А}} \boxed{\text{Ч}}$. Останалите три букви в думата $\boxed{\text{И}} \boxed{\text{Г}} \boxed{\text{Р}} \boxed{\text{А}} \boxed{\text{Ч}}$ трябва да се получат чрез подходящи действия. Понеже при всяко действие се променя една буква или най-много две (когато се използва размяна), то са необходими най-малко две действия (буквите са 3). Освен това е необходимо и действие за отстраняване на една от буквите в дадената наредба (в нея има 6 букви, а буквите в думата $\boxed{\text{И}} \boxed{\text{Г}} \boxed{\text{Р}} \boxed{\text{А}} \boxed{\text{Ч}}$ са 5). Заключаваме, че са необходими най-малко три действия. Една реализация на този брой е следната: замяна на карта $\boxed{\text{О}}$ с карта $\boxed{\text{Ч}}$; размяна на местата на карти $\boxed{\text{А}}$ и $\boxed{\text{И}}$; отстраняване на карта $\boxed{\text{М}}$.

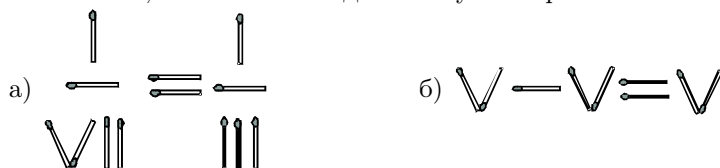
Задача 11. В дадената конструкция едно единично кубче е *елиминирано* и едно е *преместено*. Коя от конструкциите от 1 до 5 е възможно да се получи?



Решение: Дадената конструкция се състои от 7 единични кубчета. След елиминиране на едно кубче и преместване на едно, новата конструкция ще съдържа 6 единични кубчета. С толкова единични кубчета са конструкциите 2 и 5. Лесно се проверява, че само конструкцията 5 отговаря на условието на задачата.

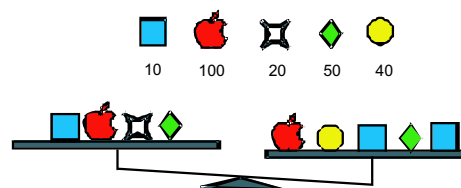
Следващите задачи са подходящи за упражнение.

Задача 12. Получете вярно равенство с помощта на едно действие с една кибритена клечка, ако във всеки един от случаите разполагате само с дадените клечки:



Отговор: а) чрез преместване $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; б) чрез преместване $10 - 5 = 5$.

Задача 13. Възможно ли е с помощта на показаните тежести върху везната и тези извън нея да получите равновесие на везната, като използвате само едно действие? Стойностите на тежестите върху везната съответстват на показаните.



Отговор: не е възможно

Задача 14. Възможно ли е с еднократно използване на едно от действията *добавяне* или *преместване* да се получи:

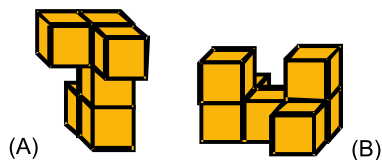
а) симетрична фигура от дадената вдясно;



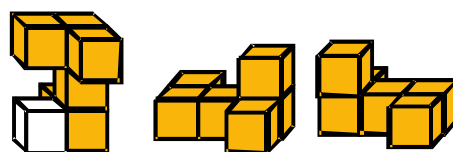
б) аритметична прогресия от редицата $-2; -4; 2; 4; 6$?

Отговор: а) да, с преместване;
б) не

Задача 15. Само с едно действие с едно единично кубче получите едната фигура от другата:



Отговор: (B) може да се получи от (A) чрез добавяне на едно единично кубче (вж. осветеното кубче от първата конструкция). Друго решение е да се получи (A) от (B) чрез отстраняване на едно единично кубче от (B), при което (B) приема вида от втората или третата конструкция.



Задача 16. Намерете минималния брой действия, с които:

- а) от буквената наредба **К Н И Г А** се получава думата **М И Н А**;
 б) от редицата $-4; 7; 2; 5; 8; 11$ се получава аритметична прогресия.

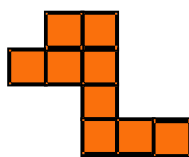
Отговор: а) 3, като една възможност е размяна на карти **Н** и **Г**, отстраняване на карта **К** и смяна на карта **Г** с **М**; б) 1, чрез смяна на 7 с -1 .

Задача 17. Посочете последователност от най-малък брой действия, с които:

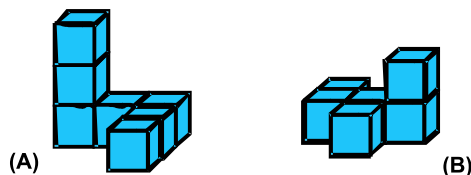
- а) от подреждането (1) на картите се получава подреждането (2);

- (1) **1 6 5 4 2 4**
 (2) **1 2 3 4 5 6**

- б) от дадената фигура се получава фигура с ос на симетрия;

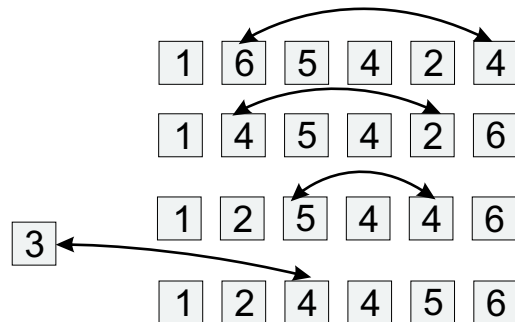


- в) от едната конструкция се получава другата;

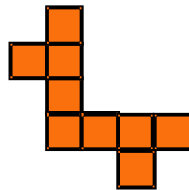


Отговори: една възможност е:

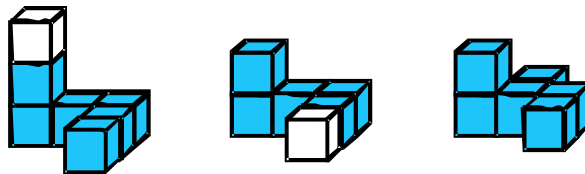
а) използване на три размени и една смяна;



б) преместване на две единични квадратчета;



в) отстраняване на “горното” и преместване на “предното” единично кубче.



ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. Б. Эльконин. Избранные психологические труды, Москва, 1989.
- [2] В. В. Давыдов. Проблемы развивающего обучения, Москва, 1986.
- [3] А. Н. Леонтьев. Деятельность, сознание, личность, Москва, 1975.
- [4] С. Гроздев, Т. Чехларова. Върху действието “добавяне” в дейността “решаване на задачи”. *Математика и математическо образование* **36** (2007), 331–340.
- [5] S. GROZDEV, T. CHEKLAROVA. On the action of elimination in the activity of problem solving. 5th Mediterranean Conference on Mathematics Education, 13–15 April 2007, RHODES Island-Greece.
- [6] С. Гроздев, Т. Чехларова. Действието “преместване” в дейността “решаване на задачи”. Сборник “Осми национален педагогически форум с международно участие “Европейски измерения на образованието”, 05.07.2007, Ст. Загора.

Сава Гроздев
Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Тони Чехларова
Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
ПУ „П. Хилендарски“
ул. Цар Асен 24
4000 Пловдив
e-mail: tchehlarova@mail.bg

LEARNING PROBLEMS IN TRAINING OF A CLASS OF ACTIONS WITH OBJECTS

Sava I. Grozdev, Tony K. Chehlarova

A system of learning problems is proposed in connection with synthesis and combined use of the actions: addition, elimination, displacement, replacement of objects and positions. The learning problems are considered as structural elements of learning activity. The actions themselves are directed towards the basic (building) elements of the corresponding objects – numbers in case of sequences, unit squares and unit cubes in case of plane figures and cube constructions, and s.o. Most of the problems (except those for progressions) could be useful in circles and extracurricular activities in Mathematics when teaching students from the lower grades, too.