

ЕДНА ФОРМУЛА ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ РАДИУСА СФЕРАТА, НА ОПИСАНА ОКОЛО ТРИЪГЪЛНА ПИРАМИДА

Валентина Димитрова Захариева, Радка Минчева Токмакчиева

Настоящата работа предлага начин за намиране радиуса на сферата, описана около произволна триъгълна пирамида. В изведената формула участват три параметъра, като определянето на радиуса не изисква уточняване на центъра на сферата.

По време на работата в кандидат-студентския курс по математика в Департамента по езиково обучение към СУ (ИЧС) възникна въпросът: Съществува ли достатъчно проста формула, с която да се намира радиусът на описаната около произволна триъгълна пирамида сфера, без да се определя мястото на нейния център.

Ето и нашия отговор.

Да разгледаме пирамида $ABCD$ с височина $H = DK$ и основа триъгълник ABC с описаната около него окръжност $k_1 (O_1, R_1)$. Сферата, описана около пирамидата, има център O и радиус R (черт.1). Този център винаги лежи върху правата през O_1 , перпендикулярна на основата. Разглеждаме сечението на сферата с равнина, определена от височината DK и т. O_1 – това е окръжността $k(O, R)$. Означаваме с N пресечната точка на правата DK с тази окръжност и с m – разстоянието от петата на височината до центъра O_1 ($m = KO_1$). Тогава, от свойството на пресичащите се хорди намираме

$$KN = \frac{R_1^2 - m^2}{H}.$$

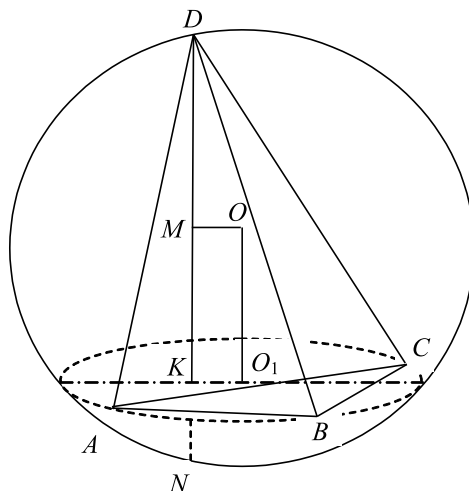
Ако M е средата на DN , то половината от цялата хорда е

$$DM = \frac{H^2 + R_1^2 - m^2}{2H}.$$

Тъй като MO е перпендикулярна на DN , то $MO = KO_1 = m$ и от теоремата на Питагор за триъгълника DMO получаваме: $DO^2 = MO^2 + DM^2$, т.е.

$$(1) \quad R^2 = m^2 + \frac{(H^2 + R_1^2 - m^2)^2}{4H^2}$$

Това е предложената формула. Ако можем лесно да определим трите параметъра, които участват в нея – височината на пирамидата H , радиуса R_1 на описаната около основата окръжност и разстоянието m от петата на височината до центъра на тази окръжност, намирането на радиуса на описаната около пирамидата сфера става само чрез заместване във формула (1).



Черт. 1

В частните случаи, когато:

- 1) центърът O лежи на височината или на нейното продължение, тогава $m = 0$
и

$$R = \frac{H^2 + R_1^2}{2H^2},$$

- 2) околен ръб е перпендикулярен на основата, сега $m = R_1$ и

$$R^2 = R_1^2 + \frac{H^2}{4}.$$

Формулата (1) е валидна и за случая, когато т. K лежи извън голямата окръжност. Доказателството се извършва по същата схема, като се използва свойството на секущите през т. K към окръжността.

От извода на формулата следва, че тя е валидна за всяка пирамида, около основата на която може да се опише окръжност.

Примери:

Задача 1. Основата на пирамида е равностранен триъгълник със страна a . Височината на пирамидата минава през средата на един основен ръб и има дължина $3a/2$. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.

Решение: Радиусът R_1 на описаната около основата окръжност е равен на $a\sqrt{3}/3$, а разстоянието m от центъра на равностранния триъгълник до средата на основен ръб е $a\sqrt{3}/6$.

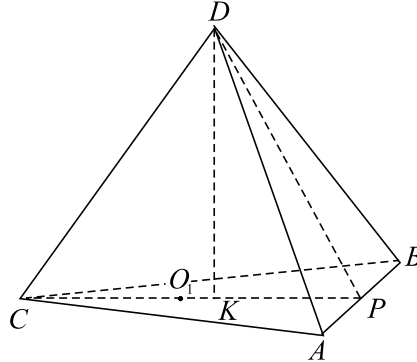
Като заместим във формула (1), получаваме

$$R^2 = (a\sqrt{3}/2)^2 + (a\sqrt{3}/3)^2 - (a\sqrt{3}/6)^2/4(3a/2)^2 = 28a^2/36.$$

и $R = \sqrt{7}/3$.

Задача 2. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ с ръбове $AB = 2$, $CD = 4$, $CA = CB = DA = DB = \sqrt{10}$. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.

Решение: Нека K е петата на височината на пирамидата през върха D (черт. 2).



Черт. 2

От условието $DA = DB$ следва, че K лежи на симетралата на AB . За еднаквите триъгълници ABC и ABD определяме височините към общата основа $CP = DP = 3$. Тогава, $K \in CP$, защото CP е симетралата на равнобедрения триъгълник ABC и центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност O_1 също лежи на CP . В равнобедрения $\triangle CPD$ намираме височината DK към бедрото, която е и височина на пирамидата: $DK = H = 4\sqrt{5}/3$ и още $CK = 8/3$. Радиусът на описаната около основата окръжност е $R_1 = AC^2/2CP = 5/3$.

И накрая, разстоянието между петата на височината т. K и центъра на описаната окръжност O_1 е $m = KO_1 = 8/3 - 5/3 = 1$. Заместваме получените стойности за H , R_1 и m във формула (1) и получаваме $R = \sqrt{105}/5$.

Валентина Димитрова Захариева
ДЕО към СУ (ИЧС)
ул. Коста Лулчев 27
1113 София
e-mail: waliazaharieva@abv.bg

Радка Минчева Токмакчиева
ДЕО към СУ (ИЧС)
ул. Коста Лулчев 27
1113 София

A FORMULA FOR RADIUS CALCULATION OF THE SPHERE CIRCUMSCRIBED AROUND A TRIANGULAR PYRAMID

Walentina Dimitrova Zaharieva, Radka Minceva Tokmakchieva

The paper presents a method for radius calculation of the sphere circumscribed around a triangular pyramid. The proposed formula uses three parameters and in the same time it does not need to specify the center of the sphere.