

ПРЕСМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯ ОТ МАТРИЦА С *MATHEMATICA*

Марин Л. Маринов

Пресмятането на функция от матрица е класическа тема от матричното смятане, която независимо от множеството приложения, отпада от университетските курсове по линейна алгебра. Една от причините за това е относително големият брой аналитични преобразувания, които са необходими при решаването на задачи от този тип. Настоящата статия има за цел да илюстрира възможностите на системата *Mathematica* при усвояването и използването на основните понятия и факти по тази тема.

I. Въведение. Последните години се очерта един сериозен проблем в образованието по висша математика в специалността информатика в редица университети. Този проблем е следствие от намаляването на часовете за лекции и упражнения по математика, което води до намаляване на ефективността на традиционните методи на преподаване. Стремително се влошава качеството на обучение и в много случаи отпадат цели раздели от учебните програми. Едновременно с това, интензивно се развиват такива системи, като *Mathematica*, *Maple*, *Mathcad*, *Mathlab*. Те все по-често се използват в редица приложения и научни изследвания. Това налага тяхното изучаване в рамките на отделни практикуми или курсове. За съжаление в един такъв отделен курс естествено акцентът пада върху запознаването с отделните вградени функции и примерите са изкуствено подбрани, за да демонстрират съответните функции. Практиката в Нов Български Университет показва, че преодоляването на горните два проблема може да се търси чрез въвеждането на нова методика за преподаване на математическите курсове. Общо казано, новото в тази методика е:

1. Утвърждаване на ново средство за преподаване, представляващо взаимно проникване и специфично преподаване на традиционните средства за преподаване на математика и възможностите на системите за компютърна алгебра.

2. Въвеждане на една нова организационна форма на обучение – лабораторни упражнения по съответната математическа дисциплина.

В резултат студентите навлизат много по-бързо в преподавания материал и получават възможност за решаване на интересни и съдържателни задачи по разглежданата тема. Броят на решените от тях задачи значително нараства. Засилва се и техният интерес. Едновременно с това запознаването с възможностите на съответната система за компютърна алгебра е по-ефективно.

Определящият момент в тази методика е как точно се изгражда новото средство за преподаване. В настоящата статия се демонстрира отговорът на този въпрос по темата “Пресмятане на функция от матрица с *Mathematica*”. С помощта на решените шест примера е показано как: освобождаването от рутинните за дадената тема сложни аналитични преобразувания дава възможност да се усвои понятието функция от матрица; чрез решаването на съдържателни конкретни задачи се подготвя доказателството на общи теореми; за кратко време студентите се подготвят да решават сложни приложни задачи и сами да дефинират нови функции в средата *Mathematica*.

II. Дефиниция на функция от матрица. Нека A е квадратна матрица от ред n . Понятието произведение на матрици дава възможност по естествен начин да определим A^k , $\forall k \in \mathbb{N}$. Например: $A^3 = A \cdot A \cdot A$. Функцията $\text{MatrixPower}[A, k]$ в системата *Mathematica* пресмята матрицата A^k . За произволен полином $p(t) = a_k t^k + \dots + a_1 t + a_0$, дефинираме матрицата $p(A)$ като $a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 E$, където E е единичната матрица от ред n . В системата *Mathematica* пресмятането на матрицата $p(A)$ става моментално, като се използват вградените функции степен на матрица, произведение на матрица с число и сума на матрици: $\sum_{j=0}^k a_j \text{MatrixPower}[A, j]$. В случая, когато $f(t)$ е произволна функция, без да ограничаваме общността [1, стр. 108], определяме матрицата $f(A)$ с равенството

$$f(A) = r(A),$$

където $m(t) = (t - t_1)^{m_1} \cdot (t - t_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (t - t_s)^{m_s}$ е минималният полином на A ,

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{k=1}^s [\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}(t - t_k) + \dots + \alpha_{k_{m_k}}(t - t_k)^{m_k-1}] \cdot g_k(t), \\ g_k(t) &= (t - t_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t - t_{k-1})^{m_{k-1}} (t - t_{k+1})^{m_{k+1}} \cdot \dots \cdot (t - t_s)^{m_s}, \\ \alpha_{k_j} &= \frac{1}{(j-1)!} \cdot \left[\frac{f(t)}{g_k(t)} \right]_{t=t_k}^{(j-1)}, \quad (j \in \{1, 2, \dots, m_k\}; k \in \{1, 2, \dots, s\}). \end{aligned}$$

Полиномът $r(t)$ се нарича *интерполяционен полином на Лагранж – Силвестър*. Той е определен когато $f^{(j-1)}(t_k)$, $j \in \{1, 2, \dots, m_k\}$ и $k \in \{1, 2, \dots, s\}$, имат смисъл. В този случай казваме, че $f(t)$ е дефинирана върху спектъра на матрицата A .

Пример 1. Ще пресметнем матриците e^{Ax} , $\sin(Ax)$ и $\cos(Ax)$ за произволно реално число x и матриците $\sqrt{Ax}$ и $\ln(Ax)$ за $x > 0$, където

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Намираме минималния полином на матрицата Ax . За целта пресмятаме характеристичния полином $\det(Ax - Et)$.

```

In[2]:= A[x_] =  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$  * x; A1[x_, t_] = A[x] - t * IdentityMatrix[4];

d4[t_] = Det[A1[x, t]] // Factor

Out[2]= (t - 8 x) (t - 4 x) (t - 2 x)^2

```

Определяме най-големият общ делител d_3 на минорите от трети ред на матрицата $Ax - Et$:

```

In[3]:= m3 = Minors[A1[x, t], 3]; Dimensions[m3]

Out[3]= {4, 4}

In[4]:= d3 = PolynomialGCD[m3[[1, 1]], m3[[1, 2]], m3[[1, 3]], m3[[1, 4]], m3[[2, 1]], m3[[2, 2]], m3[[2, 3]],
m3[[2, 4]], m3[[3, 1]], m3[[3, 2]], m3[[3, 3]], m3[[3, 4]], m3[[4, 1]], m3[[4, 2]], m3[[4, 3]], m3[[4, 4]]]

Out[4]= t - 2 x

```

Частното на характеристичния полином и d_3 е търсения минимален полином:

```

In[5]:= m[t_] =  $\frac{d4[t]}{d3}$ 

Out[5]= (t - 8 x) (t - 4 x) (t - 2 x)

```

2) За произволна функция $f(t)$, която е дефинирана в точките $2x$, $4x$ и $8x$, намираме интерполационния полином на Лагранж-Силвестър:

```

In[6]:= g1[t_] =  $\frac{m[t]}{(t - 8 x)}$ ; a11 =  $\frac{f[t]}{g1[t]}$  /. t -> 8 * x; g2[t_] =  $\frac{m[t]}{(t - 4 x)}$ ; a21 =  $\frac{f[t]}{g2[t]}$  /. t -> 4 * x;

g3[t_] =  $\frac{m[t]}{(t - 2 x)}$ ; a31 =  $\frac{f[t]}{g3[t]}$  /. t -> 2 * x; r[t_] = a11 * g1[t] + a21 * g2[t] + a31 * g3[t] // Expand;

Collect[r[t], t]

Out[6]=  $\frac{8}{3} f[2 x] - 2 f[4 x] + \frac{1}{3} f[8 x] + t^2 \left( \frac{f[2 x]}{12 x^2} - \frac{f[4 x]}{8 x^2} + \frac{f[8 x]}{24 x^2} \right) + t \left( -\frac{f[2 x]}{x} + \frac{5 f[4 x]}{4 x} - \frac{f[8 x]}{4 x} \right)$ 

```

3) Тогава, по дефиниция $f(Ax)$ е

```

In[7]:= B[x_] =  $\left( \frac{f[2 x]}{12 x^2} - \frac{f[4 x]}{8 x^2} + \frac{f[8 x]}{24 x^2} \right)$  * MatrixPower[A[x], 2] +  $\left( -\frac{f[2 x]}{x} + \frac{5 f[4 x]}{4 x} - \frac{f[8 x]}{4 x} \right)$  * A[x]

 $\left( \frac{8}{3} f[2 x] - 2 f[4 x] + \frac{1}{3} f[8 x] \right)$  * IdentityMatrix[4] // Simplify;

```

4) Полагайки последователно $f(t) = e^t$, $f(t) = \sin(t)$, $f(t) = \cos(t)$, $f(t) = \sqrt{t}$ и $\ln(t)$, пресмятаме матриците $e^{Ax} = eA[x]$, $\sin(Ax) = sA[x]$, $\cos(Ax) = cA[x]$, $\sqrt{Ax} = kA[x]$ и $\ln(Ax) = lA[x]$:

```

In[8]:= f[t_] = e^t; eA[x_] = B[x] // Simplify;

In[9]:= f[t_] = Sin[t]; sA[x_] = B[x] // Simplify;

In[10]:= f[t_] = Cos[t]; cA[x_] = B[x] // Simplify;

In[11]:= f[t_] = Sqrt[t]; kA[x_] = B[x] // Simplify;

In[12]:= f[t_] = Log[t]; lA[x_] = B[x] // Simplify;

```

(Поради недостиг на място не представяме получените матрици.)

В системата *Mathematica* има вградена функция за пресмятане на експонента на матрица. Това е функцията *MatrixExp*[*A*]. Да сравним получената в пример 1 матрица $e^{Ax} = eA[x]$ с резултата от *MatrixExp*[*x*].

```
In[13]:= eA[x] == MatrixExp[A[x]] // Simplify
Out[13]= True
```

III. Основни свойства на функция от матрица.

Пример 2. Ще проверим, че за получените в пример 1 матрици са в сила равенствата: а) $\sqrt{Ax} \cdot \sqrt{Ax} = Ax$; б) $(\sin(Ax))^2 + (\cos(Ax))^2 = E$; в) $2(\cos(Ax))^2 - \cos(2Ax) = E$; г) $2\sin(Ax) \cdot \cos(Ax) = \sin(2Ax)$.

```
In[14]:= kA[x].kA[x] == A[x] // Simplify
Out[14]= True

In[15]:= sA[x].sA[x] + cA[x].cA[x] // Simplify
Out[15]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

In[16]:= 2 * cA[x].cA[x] - cA[2 * x] // Simplify
Out[16]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

In[17]:= 2 * sA[x].cA[x] == sA[2 * x] // Simplify
Out[17]= True
```

Резултатите в пример 2 са директно следствие от следното общо свойство:

Свойство 1. Нека $G(u_1, u_2, \dots, u_s)$ е полином на променливите $u_1, u_2, \dots, u_s$ и функциите $f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)$ са определени върху спектъра на матрицата A . Ако функцията $g(t) = G(f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t))$ е нула върху спектъра на матрицата A и $B_j = f_j(A)$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, $G(B_1, B_2, \dots, B_s)$ е нулевата матрица.

Доказателство. Виж [1, стр. 119].

Пример 3. Да проверим, че за получената в пример 1 матрица $\ln(Ax) = lA[x]$ е в сила равенството $e^{\ln(Ax)} = Ax$:

```
In[18]:= MatrixExp[lA[x]] // Simplify
Out[18]= {{4 x, -2 x, -x, x}, {-2 x, 4 x, x, -x}, {-x, x, 4 x, -2 x}, {x, -x, -2 x, 4 x}}

In[19]:= % == A[x]
Out[19]= True
```

С други думи, получената в пример 1 матрица $lA[x]$ е решение на матричното уравнение $e^Y = Ax$.

Примери от този тип са директно следствие на следното свойство:

Свойство 2. Ако съставната функция $g(t) = h(f(t))$ е дефинирана върху спектъра на матрицата A и $B = f(A)$, то $g(A) = h(B)$.

Доказателство. Вж. [1, стр. 120].

Пример 4. Да проверим, че получената в пример 1 матрица $e^{Ax} = eA[x]$ е решение на задачата на Коши: $Y'(x) = A \cdot Y(x)$ и $Y(0) = E$.

```
In[20]:= D[eA[x]] == A[1].eA[x] // Simplify
Out[20]= True
```

```

In[21]:= eA[0]
Out[21]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

In[22]:= 0, sA[x] == A[1].cA[x] // Simplify
Out[22]= True

In[23]:= 0, cA[x] == -A[1].sA[x] // Simplify
Out[23]= True

In[24]:= cA[0]
Out[24]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

In[25]:= sA[0]
Out[25]= {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

```

Пример 5. Да намерим матрицата $f(j(a))$, където $j(a)$ е Жорданова клетка от четвърти ред с диагонален елемент a и $f(t)$ е функция, която има производни до трети ред в числото a .

Аналогично на пример 1 намираме минималния полином на $j(a)$. Той е равен на $m(t) = (t - a)^4$. Намираме интерполационния полином на Лагранж–Силвестър:

```

In[29]:= a1 = f[t] /. t -> a; a2 = D[f[t], {t, 1}] /. t -> a; a3 = 1/2! D[f[t], {t, 2}] /. t -> a;
Collect[r[t], t]
Out[29]= f[a] - a f'[a] + 1/2 a^2 f''[a] - 1/6 a^3 f'''[a] + 1/6 t^2 f'''[a] + t^2 (f''[a]/2 - 1/2 a f'''[a]) + t (f'[a] - a f''[a] + 1/2 a^2 f'''[a])

```

Тогава по дефиниция матрицата $f(j(a))$ е равна на J , където

```

Collect[r[t], t]
Out[29]= f[a] - a f'[a] + 1/2 a^2 f''[a] - 1/6 a^3 f'''[a] + 1/6 t^2 f'''[a] + t^2 (f''[a]/2 - 1/2 a f'''[a]) + t (f'[a] - a f''[a] + 1/2 a^2 f'''[a])

```

Полученият резултат се обобщава за Жорданови клетки от произволен ред.

Свойство 3. Ако функцията $f(t)$ е дефинирана върху спектъра на матрицата A и $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$, $f(B) = T^{-1} \cdot f(A) \cdot T$.

Доказателство. Виж [1, стр. 106].

Свойство 4. Ако функцията $f(t)$ е дефинирана върху спектъра на матрицата A и A е квазидиагонална с матрици $A_1, A_2, \dots, A_s$ по диагонала, матрицата $f(A)$ е също квазидиагонална, но с матрици $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_s)$ по диагонала.

Доказателство. Вж. [1, стр. 106].

Последните две свойства и пример 5 могат да се използват за пресмятане на функция от матрица.

Пример 6. Да пресметнем матрицата $f(a)$ при условие, че функцията $f(t)$ е определена върху спектъра на матрицата

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Функцията $JordanDecomposition[a]$ дава втора компонента жордановата форма на матрицата a и първа компонента матрицата на прехода. В случая това са матриците $s[[1]]$ и $s[[2]]$:

```
In[31]:= a = {{1, 0, 0, 1, -1}, {0, 1, -2, 3, -3}, {0, 0, -1, 2, -2}, {1, -1, 1, 0, 1}, {1, -1, 1, -1, 2}}
s = JordanDecomposition[a];
{MatrixForm[s[[1]]], MatrixForm[s[[2]]]}
```

```
Out[31]:= { $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ }
```

В сила е равенството $a = s[[1]] \cdot s[[2]] \cdot s[[1]]^{-1}$:

```
In[32]:= a == s[[1]].s[[2]].Inverse[s[[1]]]
Out[32]:= True
```

Тогава според свойство 4 и пример 5 матрицата $f(s[[2]])$ има вида:

```
In[33]:= J1 =  $\begin{pmatrix} f[-1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f[1] & f'[1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f[1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f[1] & f'[1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f[1] \end{pmatrix}$ ;
```

От свойство 3 следва, че търсената матрица $f(a)$ е

```
In[34]:= B1 = s[[1]].J1.Inverse[s[[1]]]; MatrixForm[B1]
Out[34]:= MatrixForm[ $\begin{pmatrix} f[1] & 0 & 0 & f'[1] & -f'[1] \\ 0 & f[1] & f[-1] - f[1] & -f[-1] + f[1] + f'[1] & f[-1] - f[1] - f'[1] \\ 0 & 0 & f[-1] & -f[-1] + f[1] & f[-1] - f[1] \\ f'[1] & -f'[1] & f'[1] & f[1] - f'[1] & f'[1] \\ f'[1] & -f'[1] & f'[1] & -f'[1] & f[1] + f'[1] \end{pmatrix}$ ]
```

IV. Заключение. Представеният нов подход дава възможност новите технологии да се използват за качествено усвояване на математическите знания и същевременно за запознаване на студентите със системата *Mathematica*. Една реализация на този подход при изучаването на линейна алгебра се съдържа в книгата [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ф. Р. ГАНТМАХЕР. Теория матриц. Наука, Москва, 1967.
- [2] М. Л. МАРИНОВ. Матрично смятане с *Mathematica*, (под печат).

Марин Ласков Маринов
Департамент по Информатика
Нов Български Университет
ул. Монтевидео 21
1618 София, България
e-mail: mlmarinov@nbu.bg

CALCULATION OF MATRIX FUNCTIONS USING THE *MATHEMATICA* SOFTWARE PACKAGE

Marin L. Marinov

The topic of matrix functions is not considered in many university programs. One of the reasons for that is the big amount of analytical transformations in the solution of this kind of problems.

In this paper, an approach how to use the software package Mathematica is proposed in order to help students to understand the concepts and statements, used to calculate matrix functions.