

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2008  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2008  
*Proceedings of the Thirty Seventh Spring Conference of  
the Union of Bulgarian Mathematicians  
Borovetz, April 2–6, 2008*

ЗА ЕДИН РЕФЛЕКСИВЕН МОДЕЛ НА ОБУЧЕНИЕ И  
НЕГОВО ПРИЛОЖЕНИЕ\*

Васил Борисов Милушев, Димитър Георгиев Френкев

В статията е представен модел за овладяване на математически знания и умения в контекста на отношението „обучение-рефлексия“ [3]. Демонстрирано е негово приложение за овладяване от учениците на частно-математически метод за решаване на уравнения от четвърта степен, на базата на тяхната основна информация (адаптиран за средното училище вариант на метода на Декарт за решаване на уравнения от четвърта степен), в определени случаи.

Редица съвременни изследвания ([1–5] и др.), посветени на рефлексивната проблематика, категорично обосновават необходимостта от организиране на методически системи за обучение на базата на рефлексивния подход. Водещи при този подход са принципите за съзнателност, активност и рефлексивност. Последният от тях изисква по-голяма активност, съзнателност и рефлексивност от субекта и особено от обучаващия, който трябва да разгръща рефлексивния потенциал на учещия. Специално в процеса на обучаване на учещите на **методи за решаване на задачи**, той не само трябва да мотивира в необходимата степен учещия, най-вече чрез акцентирание върху широката приложимост на методите, както и върху факта, че те са ефективно средство за справяне с учебни проблеми, но и да насочва учещия към самоорганизация на собствената си дейност (самоактуализация, самореализация, самоконтрол, саморегулация, самоусъвършенстване на личностните си качества и т.н.). За целта обучаващият трябва да оползотворява рефлексивните възможности на учебното съдържание, което по презумпция включва и различните методи за решаване на математически задачи, както и теоретичната основа за тяхното обособяване и фиксиране в съзнанието на субекта. Заедно с това е необходимо да се създават условия за активизиране у учещия на ефективните типове рефлексии над знанията за съответните методи и над уменията му за тяхното прилагане.

„Рефлексията е социокултурно обусловена интелектуална процедура, съзнателно насочена (и осмислена) към самопознание, която се проявява в няколко различни модуса“ [1, с. 99]. С разглеждания проблем пряко са свързани модусите **интелектуална** рефлексия и **праксиологическа** рефлексия. Интелектуалната рефлексия, от своя страна, се проявява в два по-конкретни модуса: 1) „като осъзнаване основанията и източниците на нашите мисли, действия и знания“ [1, с. 111]; 2) „интелектуалната рефлексия е конструиране на плана, схемата, модела, по който ще се реши

---

\*Изследванията са направени с финансово съдействие на фонд НИ при ПУ, договор 07-М-8.

една проблемна и достатъчно сложна задача; мислено избързване напред в процеса на познавателното действие („перспективна рефлексия“), при което субектът внимателно отчита и прилага своите лични познавателни възможности, своите силни (но и слаби) страни ...“ [1, с. 111].

„Размишленията, чрез които субектът подбира нужните и най-подходящи знания, за да осъществи дадена практическа дейност; мисловните процедури, чрез които се подготвя, регулира и контролира превръщането на тези знания в средства (инструменти) ...; регулирането, контролирането и осмислянето на ефективността от използването на прагматизирани знания и действия ... и всичко това непрекъснато съотнасяно с особеностите на мислещия и действащ субект – такъв е в основни линии психичният феномен, за който беше нужен новият термин „праксиологическа рефлексия“ [1, с. 181].

В [1] е изграден модел за обучение на базата на взаимна обусловеност на посочените по-горе два рефлексивни модуса. Базирайки се на основното положение от теорията на познанието, Ив. Ганчев в [2] представя два модела, единия за придобиване на математически знания, а другия – за прилагането им. Въз основа на тези изследвания, разработихме и апробирахме комплексен модел за овладяване на математически знания и умения, който представяме на фиг. 1.

Този модел бе използван за организиране на експериментално обучение с ученици от 12 клас с цел овладяване на общологически и основни частно-математически методи, а също и някои евристики за решаване на задачи.

Тук ще представим отделни етапи от системата от дейности (изградена в съответствие с горния модел) за овладяване от учениците на частно-математически метод за решаване (в определени случаи) на уравнения от четвърта степен, на базата на тяхната основна информация, който се явява адаптиран за средното училище вариант на метода на Декарт за решаване на уравнения от четвърта степен.

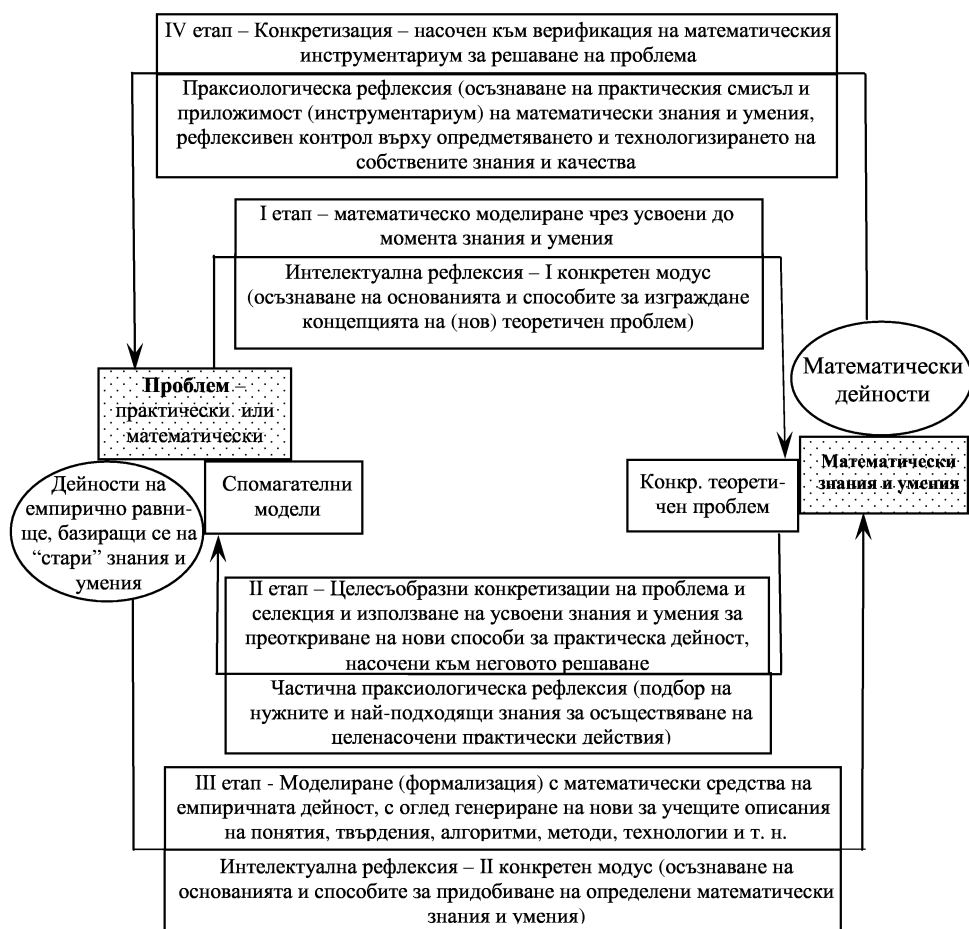
**I етап.** Търсене на решения чрез усвоени до момента знания и умения (виж фиг. 1).

**Задача 1.** Да се реши уравнението  $\sqrt{x+5} = 5 - x^2$ .

*Търсене на решение.* Учениците определиха множеството от допустимите стойности:  $x \geq -5$  както и множеството:  $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ , в което са възможни еквивалентни преобразувания, и стигнаха до уравнението  $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$ . Установиха, че ако то има реални корени, то те са ирационални числа, поради което се насочиха към метода на субституциите и съставиха следната система:  $x + 5 = t^2$  и  $t = 5 - x^2$ .

Тъй като в такива случаи обикновено се елиминира неизвестното, което се търси, учениците получиха уравнението  $t^4 - 10t^2 + t + 20 = 0$ , което обаче също няма рационални корени.

Учениците бяха насочени към използване на факта, че неизвестното  $t$  фигурира в уравненията на системата в степен, не по-висока от втора, по следния начин: умножаване двете страни на второто уравнение с реално число  $k \neq 0$  и почленно събиране с първото уравнение. Така се стигна до следното уравнение  $t^2 - kt - kx^2 - x + 5k - 5 = 0$ . Числото  $k$  бе определено така, че дискриминантата на това уравнение да е точен квадрат, т.е. дискриминантата на дискриминантата му  $k(-4k^2 + 84k - 80)$  да е равна на нула. Така се получи  $k = 1$  или  $k = 20$ . При  $k = 1$  се стигна до уравнението  $(t + x)(t - x - 1) = 0$ , а въз основа на него системата се редуцира на



Фиг. 1

следните две системи:  $\begin{cases} t = -x \\ t = 5 - x^2 \end{cases} ; \begin{cases} t = x + 1 \\ t = 5 - x^2 \end{cases} .$

След решаването им и отчитането на факта, че  $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ , бе направен извод, че корени на даденото уравнение са само числата  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ .

Тази задача е „многофункционална“, тъй като дава възможност за овладяване и на други евристични прийоми за търсене на решения. Така например, на базата на обстоятелството, че при  $k = 1$  числото 5 се яви „елиминираща“ се константа, се стигна до идея, че то може да се окаже „ключово“, ако в изходното уравнение числото 5 се замени с буква-параметър  $a$  и след това уравнението се реши спрямо  $a$ . Така се получиха равенствата  $a = x^2 - x$  и  $a = x^2 + x + 1$ , които се трансформираха в следните уравнения  $x^2 - x - 5 = 0$  и  $x^2 + x - 4 = 0$ . По-нататък е ясно как се намират корените им.

В етапа „Поглед назад“ бяха разисквани и други начини за решаване на даденото ирационално уравнение, върху които тук не се спираме. Друга цел на този етап бе да убедим учениците, че владееенето на ефективни методи за решаване на уравнения от четвърта степен, е изключително полезно за решаване на широк кръг разнообразни математически задачи. Така се стигна до конкретния проблем: разработване на адекватни, за средното училище, методи за решаване на уравнения от четвърта степен, базиращи се на основната информация в тях.

**II етап.** Използване на усвоени знания и умения за преоткриване на нови способности за емпирична дейност, насочени към решаване на проблема (фиг. 1).

Бяха разгледани последователно няколко задачи за решаване на уравнения от четвърта степен, степенувани по трудност. Тук представяме „обучаващо решение“ на следната

**Задача 2.** Да се реши уравнението  $x^4 - 7x^2 + 2x + 2 = 0$ .

*Търсене на решение.* Анализ. За да решим уравнението, е достатъчно то да се представи във вида  $(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0$ .

Синтез. Тъй като коефициентът пред  $x^3$  в даденото уравнение е нула, а в последното е  $a_1 + a_2$ , то  $a_1 = -a_2 = a$  (т.е.  $a_1 = a$ ,  $a_2 = -a$ ).

Анализ. Полагаме  $b_1 = b - c$ ,  $b_2 = b + c$ . Така получаваме уравнението

$$(x^2 + ax + b - c)(x^2 - ax + b + c) = 0,$$

което преобразуваме последователно както следва:

$$((x^2 + b) + (ax - c))((x^2 + b) - (ax - c)) = 0, \quad (x^2 + b)^2 - (ax - c)^2 = 0,$$

$$(1) \quad (x^2 + b)^2 = (ax - c)^2.$$

Следователно, за да решим даденото уравнение, е достатъчно да го представим във вида (1).

Синтез. Първи начин – преобразуване на даденото уравнение с цел първо да се получи лявата страна на (1).

$$\begin{aligned} x^4 &= 7x^2 - 2x - 2 \mid + 2x^2b + b^2 \\ (x^2 + b)^2 &= (2b + 7)x^2 - 2x + b^2 - 2 \end{aligned}$$

За да е изпълнено последното равенство, е необходимо:

а)  $2b + 7 > 0$ ,  $b^2 - 2 > 0$ ; б) дискриминантата на дясната страна да е равна на нула или, което е все едно, да е в сила равенството  $\sqrt{2b + 7}\sqrt{(2b)^2 - 8} = 2$ .

Полагаме  $t = 2b$  и намираме  $t \in (-7; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$  и, че  $t = 2b$  е решение на уравнението  $t^3 + 7t^2 - 8t - 60 = 0$ . Като се използват ограниченията, лесно се установява, че  $t = 2b = -3$  и значи  $b = -1,5$ . Така се стига до следния вид на даденото уравнение  $(x^2 - 1,5)^2 = (2x - 0,25)^2$ , от което се получават следните уравнения  $4x^2 - 8x - 5 = 0$ ;  $4x^2 + 8x - 7 = 0$ .

Втори начин – преобразуване на даденото уравнение с цел първо да се получи дясната страна на (1):  $x^4 - 7x^2 + 2x + 2 + a^2x^2 - 2acx + c^2 = (ax - c)^2$ ,

$$x^4 + (a^2 - 7)x^2 + 2(1 - ac)x + c^2 + 2 = (ax - c)^2.$$

Чрез аналогични разсъждения се установява, че за да бъде лявата страна точен

квадрат, достатъчно е да са изпълнени условията:

$$1 - ac = 0, \quad c^2 + 2 > 0, \quad 2\sqrt{c^2 + 2} = |a^2 - 7|.$$

Имаме следните две възможности: получаване на уравнение спрямо  $c$ :  $4c^6 - 41c^4 + 14c^2 - 1 = 0$ ; или на уравнение спрямо  $a$ :  $a^6 - 14a^4 + 41a^2 - 4 = 0$ .

И в двата случая не е трудно да се стигне до познатото уравнение  $(x^2 - 1, 5)^2 = (2x - 0, 25)^2$ .

**III етап.** „Формализация“ на емпиричната дейност (фиг. 1).

Съвместно с учениците бе разработен схематичен модел за решаване на уравнения от вида  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ , където  $p$ ,  $q$  и  $r$  са рационални числа (в случая, когато поне едно от числата  $a$ ,  $b$  и  $c$  в уравнението (1) е рационално число), който предполага изследване и оползотворяване някоя от възможностите:

$$1. \quad x^4 = -px^2 - qx - r, \quad (x^2 + b)^2 = (2b - p)x^2 - qx + b^2 - r,$$

$$2b - p, \quad b^2 - r > 0, \quad \sqrt{2b - p}\sqrt{(2b)^2 - 4r} = |q| > 0 \dots \quad ;$$

$2b$  е делител на  $q^2 - 4pr$  (дискриминантата на  $px^2 + qx + r$ ).

$$2. \quad (x^2)^2 + (p + a^2)x^2 + (q - 2ac)x + r + c^2 = (ax - c)^2$$

$$r + c^2 > 0, \quad q = 2ac, \quad 2\sqrt{r + c^2} = |p + a^2|,$$

$$2.1. \quad a = \frac{q}{2c}, \quad r + c^2 > 0, \quad 2\sqrt{r + c^2} = \left| p + \frac{q^2}{4c^2} \right| \dots;$$

$$2.2. \quad c = \frac{q}{2a}, \quad r + \frac{q^2}{4a^2} > 0, \quad \sqrt{r + \frac{q^2}{4a^2}} = |p + a^2| \dots$$

В повечето случаи в училищния курс по математика се разглеждат уравнения от описания вид, при които, след прилагането на метода, числата под радикалите се явяват точни квадрати, а използването на това, от своя страна, в значителна степен облекчава намирането съответно на  $a$ ,  $b$  или  $c$ .

**IV етап.** Проверка на резултатността от прилагане на получените знания и умения (фиг. 1).

Този етап бе реализиран върху конкретни примери, с които учениците не само овладяха уменията за прилагане на горния метод, но и осъзнаха неговата практическа приложимост, което допринася за развиване на праксиологическа рефлексия у тях.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Василев. Рефлексията в познанието, самопознанието и практиката. Пловдив, Макрос, 2006.
- [2] Ив. Ганчев. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания), С., Модул-96, 1999.
- [3] М. Георгиева. Рефлексията в обучението по математика (V–VI клас). В.Търново, Faber, 2001.
- [4] С. Гроздев. Организация и самоорганизация при решаване на задачи. *Математика и информатика*, 2002, кн. 6, 51–58.
- [5] С. И. Гроздев. Теория и практика на подготовката на изявени ученици за участие в олимпиади по математика. Дисертация за научна степен ДПН, С., 2002.

Васил Борисов Милушев  
ул. „П.Д.Петков“ № 39, ап. 8  
4000, гр. Пловдив  
e-mail: milushev@pu.acad.bg

Димитър Георгиев Френкев  
ул. “Деспот Слав” 28  
4700, гр. Смолян  
e-mail: d\_frenkev@abv.bg

## **ABOUT A REFLEXIVE MODEL OF EDUCATION AND ITS APPLICATION**

**Vassil B. Millushev, Dimitar G. Frenkev**

In the paper is presented a model for mastering mathematical knowledge and skills in the context of the relation “education-reflexy”. It is demonstrated its application for mastering by the students of a method for solving (in certain cases) equations of 4-th degree, on the base of their basic information (it is adapted to the secondary school version of Descartes’ method for solving equations of 4-th degree).