

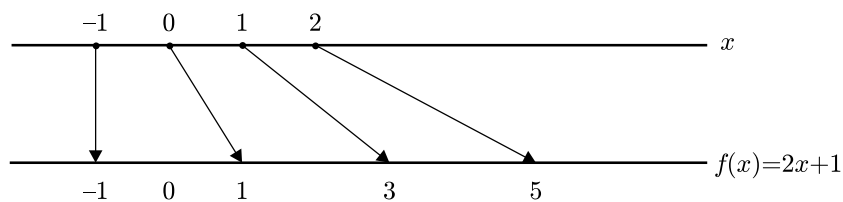
ПРОИЗВОДНА НА СЛОЖНА ФУНКЦИЯ

Тодоринка Петрова Стоева

В представения материал се споделя опит за по-лесно, достъпно и по-различно изучаване на учебен материал по математика в часовете по задължително избираема подготовка (ЗИП) в дванадесети клас в Професионална гимназия по речно корабостроене и корабоплаване – Русе.

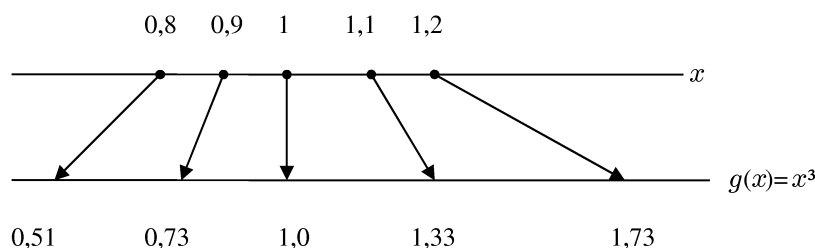
В учебниците по математика [1], [2] са разгледани два аспекта на понятието производна на функция – геометричен и механичен. Учениците в часовете по ЗИП се запознават с още една интерпретация на понятието производна, като коефициент на разтегливост при разглеждане на примери от учебник [1]. В резултат на това се осмисля формулата за производна на сложна функция. От разгледаните примери се прави обобщение и извод за намиране на производна на сложна функция. Подходът дава възможност учениците сами да стигнат до верни изводи и твърдения.

Производната като коефициент на разтегливост. Чертаят се две числови прави. На едната от тях се отбелязват стойностите на аргумента, а на другата съответните стойности на функцията (в същия мащаб). На чертеж 1 е показано полученото за функцията $f(x) = 2x + 1$ (зад. 1а, стр. 43, [1]).



Черт. 1

Вижда се, че функцията $f(x) = 2x + 1$ преобразува отсечката $[-1; 0]$ в отсечката $[-1; 1]$, отсечката $[0; 1]$ – в отсечката $[1; 3]$, отсечката $[1; 2]$ – в отсечката $[3; 5]$ и т.н. Във всички тези случаи отсечката се увеличава два пъти. Така, че всяка отсечка $[a; b]$ разглежданата функция преобразува в отсечка $[2a+1; 2b+1]$. Функцията $f(x) = 2x + 1$ променя дължините на отсечките от числовите оси еднакво – умножени по две. Аналогични разсъждения могат да се направят за всички линейни функции.



Черт. 2

На чертеж 2 се вижда, че функцията $g(x) = x^3$ (зад. 1е, стр. 43, [1], [3]) е нелинейна и разтяга отсечките разположени на различни места от числовата ос по-различно: например, отсечката $[0,8; 0,9]$ – 2,2 пъти, а отсечката $[1,1; 1,2]$ – четири пъти. Следователно не може да се каже колко пъти функцията $g(x)$ разтяга отсечките от числовата ос. Проверява се колко пъти функцията $g(x)$ разтяга отсечките, разположени на числовата ос в близост до дадена точка. Например, до точката $x = 1$. Започва се с отсечка с дължина 0,1: отсечката $[0,9; 1]$ се увеличава 2,7 пъти, а отсечката $[1; 1,1]$ се увеличава 3,3 пъти. Продължаваме с отсечките $[0,99; 1]$ и $[1; 1,01]$. От $0,99^3 \approx 0,97$, $1,01^3 \approx 1,03$ (до втория знак след десетичната запетая) следова, че отсечката $[1; 1,01]$ се разтяга $\frac{1,01^3 - 1^3}{1,01 - 1} \approx 3$ пъти; по същия начин отсечката $[0,99; 1]$ се разтяга $\frac{1^3 - 0,99^3}{1 - 0,99} \approx 3$ пъти. Ако се разгледат по-къси отсечки в близост до точката $x = 1$, то коефициентът на разтягане е още по-близък до 3. И така, функцията $g(x) = x^3$ разтяга отсечките в близост до точката $x = 1$ три пъти. Колкото по-близки са отсечките до точката $x = 1$, толкова по-близък до три е коефициентът на разтягане в точката $x = 1$.

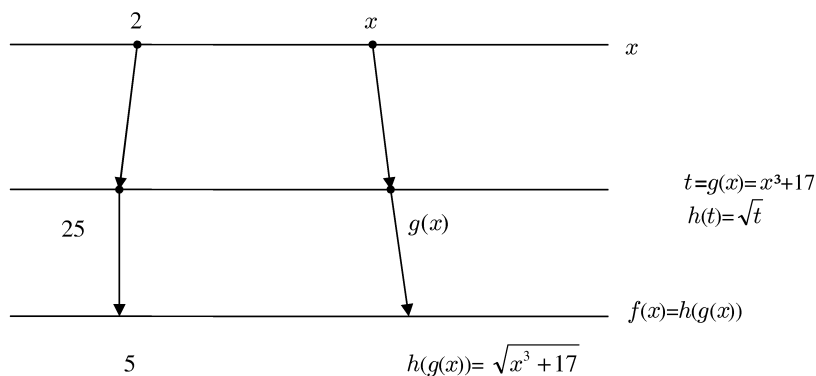
Проверява се дали за всяка диференцируема функция f коефициентът на разтягане на малките отсечки, в близост до точка x , е същия както производната на функцията f в точката x . Ако точката x_1 е близо до точка x , отсечката $[x; x_1]$ преминава в отсечка $[f(x); f(x_1)]$ и коефициентът на разтягането ѝ е $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$, а това е същият израз, който се използва при определяне производната на функцията в точка x (в знаменателя е записано нарастването на аргумента, а в числителя – нарастването на функцията). Когато x_1 клони към x (отсечките намаляват), това отношение клони към $f'(x)$.

В разгледаните примери коефициентът на разтегливост, т.е. производната, е по-голям от единица. Ако коефициентът на разтегливост е по-малък от единица, но положителен, то отсечките, в близост до дадена точка, няма да се разтягат, а ще се свиват (техните дължини ще се умножават с число, по-малко от единица). При $f'(x) < 0$, отсечките се преобразуват: левият край на отсечката $[a; b]$ се преобразува в десния край на отсечката $[f(b); f(a)]$. Това не е случайно: когато производната е отрицателна, функцията намалява, така че от $a < b$ следва, че $f(b) < f(a)$.

От горепосоченото може да се направи следния извод: малките отсечки, близо до точката x , се разтягат от функцията f с коефициент, близък до $f'(x)$. Колкото по-близки са отсечките до точката x , толкова по-близък е коефициентът до $f'(x)$.

Следователно функцията $g(x) = x^3$ разтяга отсечките близо до точката $x = 1$ три пъти.

Функция от функция (сложна функция). Разглежда се функцията $f(x) = \sqrt{x^3 + 17}$, която преобразува точката x в точка $\sqrt{x^3 + 17}$. Това преобразуване може да стане на два етапа: първо x се преобразува в точка $t = x^3 + 17$, а след това точка t се преобразува в точка $\sqrt{t}$. Разглеждат се функциите $g(x) = x^3 + 17$ и $h(t) = \sqrt{t}$. Получава се, че $f(x) = h(g(x))$. Този запис означава, че f е представена във вид на сложна функция. Като се приложат вече разгледаните изобразявания преди това, функцията ще изглежда по начина, показан на черт. 3.



Черт. 3

Както в предходните примери така и в разглеждания пример, на първата ос са значенията за x , а на третата – стойностите на $f(x)$.

Изчисляване на производна на сложна функция. Намиране на производната на функцията $f(x) = \sqrt{x^3 + 17}$ в точката $x = 2$: Производната $g'(2) = 12$, а производната $h'(g(2)) = h'(25) = 0,1$, следователно дължината на преобразуваната отсечка се умножава с $12 * 0,1 = 1,2$ така, че $f'(2) = 1,2$. След повторение на разсъжденията за всяка точка x се получава правилото: ако $f(x) = h(g(x))$, то $f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$.

Същото е вярно за всички диференцируеми функции h и g .

В случая, когато $h(t) = \sqrt{t}$, $g(x) = x^3 + 17$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 17}$, се получава $f'(x) = 3x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 17}}$.

Получава се познатата от учебника формула за производна на сложна функция. Може да се запишат аналогични формули за функции от две и повече функции. Това е ефективен подход за намиране на производни на по-сложни функции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] З. Запрянов, И. Димовски, К. Коларов, Д. Кривошиев. Математика за 12.клас, профилирана подготовка. Просвета, С., 2002.
- [2] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски, Е. Стоименова. Математика 12.клас, профилирана подготовка. изд. къща Анупис, С., 2002.

[3] С. М. Львовский. Производная сложной и обратной функции. *Квант*, кн. 4, 1989.

ул. Дондуков Корсаков № 246
ПК 7012, Русе
e-mail: tps_c@abv.bg

DERIVATIVE OF A COMPOSITE FUNCTION

Todorinka Petrova Stoeva

It is shared experience for easier, more accessible and more different studying of the subject of mathematics in the classes of obligatory selectable training in the twelfth grade in the Vocational Secondary School of River Shipbuilding and Inland Navigation – Ruse.

Two aspects of the concept of derivative of a function are represented in the mathematics textbooks [1], [2] – geometrical and mechanical. The students in the obligatory selectable training classes become aware of one more interpretation of the concept of derivative as an elasticity coefficient, considering the examples in textbook [1]. As a result, a meaning is given for the formula for the derivative of a composite function. From the considered examples, a summary and conclusion can be drawn up for finding of a derivative of a composite function. This approach provoke students to reach true conclusions and statements on their own.