

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2008  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2008  
Proceedings of the Thirty Seventh Spring Conference of  
the Union of Bulgarian Mathematicians  
Borovetz, April 2–6, 2008*

**ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА  
СИСТЕМА ЗА НАМИРАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ МЕСТА  
ОТ ТОЧКИ В 6 КЛАС**

**Ирина Петрова Шаркова**

Разгледана е система от задачи за заключителен урок върху материала за Декартова координатна система в 6 клас. Тя има за цел да затвърди наученото за лица на фигури, да покаже приложения на знанията за рационални числа, да илюстрира различни методи за доказателство и да развие усета на учениците за намиране на точки с определени геометрични свойства.

Сред най-трудните и интересни задачи по геометрия са тези за намиране на множества от точки с определени свойства – геометрични места от точки. При решаването им учениците обикновено намират някои от тях интуитивно, но не се досещат как да обосноват наличието или отсъствието на други със същото свойство. В тази им дейност те трябва да бъдат подпомагани от учителя във възможно по-ранна възраст, за да могат да придобият навики за мотивиране или доказване при решаването на геометрични задачи. Обосноваването на отговора ще помогне на учениците да намерят всички точки, които удовлетворяват условието на задачата.

За учениците от 6-ти клас систематичното изграждане на знанията по геометрия тепърва предстои. Те са запознати с понятието лице на фигури и методи за намирането му. Изучаването на координатна система е удобен повод да се обвържат новите знания за числата с геометрията и същевременно да се разшири представата на децата за геометричните обекти. Задачи от този род активизират наблюдателността и съобразителността на учениците и ги амбицират да търсят потвърждение на изказани от тях или от съучениците им хипотези.

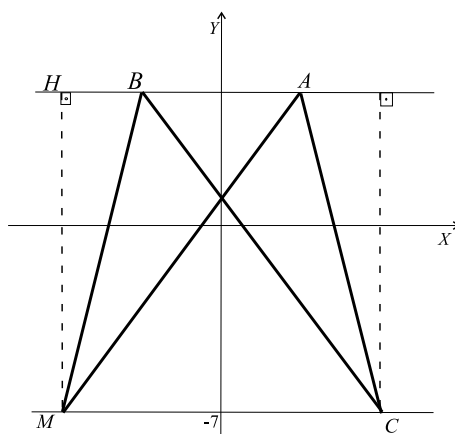
Опитът ми показва, че построяването на чертежи в координатна система е приятна и интересна дейност за учениците, а получаването на фигури и откриването на техни свойства се възприема като игра. Едновременно с това, точният чертеж подпомага математическата интуиция, като активизира децата да наблюдават и да формулират съответна хипотеза. В такъв вид учебна работа те стават изследователи, което е най-високото ниво на познавателната дейност.

Подборът и наредбата на предложените тук задачи следват последователно задълбочаване в темата и дават възможност за активно участие на всички ученици. Разглеждат се страни и диагонали, успоредни на координатните оси, тъй като по учебния план в 6 клас децата могат да намират дължини само на такива отсечки.

Като входно ниво учениците трябва да познават методите за намиране на координати на точки, дължини на отсечки и лица на фигури в координатна система. Интересни задачи на тази тема преподавателят може да намери в [1] и [2, с. 48].

Първите две задачи използвах като въведение към методите, които да бъдат разглеждани с учениците:

**Задача 1.** В правоъгълна координатна система са дадени точките  $A(1; 5)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(2; -7)$ . Намерете координатите на всички точки  $M$ , за които лицето на  $\triangle ABM$  е равно на лицето на  $\triangle ABC$ .



Фиг. 1

Като използват знанията си за лица, учениците бързо се досещат, че точките от правата  $y = -7$  са на същото разстояние, както точка  $C$  от основата  $AB$  и имат исканото свойство. По-трудно се вижда втората права  $y = 17$ . Веднага се появява въпросът има ли и други точки с това свойство и ако такива няма, как да го докажат. Като използват формулата за лице, учениците сами стигат до извода, че височината на  $\triangle ABM$  трябва да е 12. (Фиг. 1)

Нека височината е  $MH = |y_M - y_H| = |y_M - 5| = 12$ , така получаваме, че ордината на точка  $M$  може да е само  $y_M = -7$  или  $y_M = 17$ . За абсцисата няма ограничение и така търсените точки са  $M(x_M; -7)$  и  $M(x_M; 17)$ .

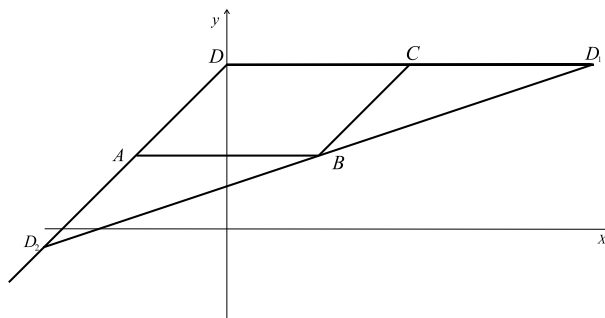
**Задача 2.** В правоъгълна координатна система са дадени точките  $A(2; 5)$ ,  $B(2; -3)$ ,  $C(4; 1)$ . Намерете координатите на всички точки  $M$ , за които лицето на  $\triangle ABM$  е два пъти по-голямо от лицето на  $\triangle ABC$ .

При решаването на тази задача е достатъчно учениците да се насочат към откриването на уравнението, от което да получат търсените координати.

На този етап, съвместно с децата, обобщавам, че множеството на търсените точки са две прави, които са успоредни и на основата на триъгълника.

Следващата задача изисква припомняне на свойствата на успоредниците:

**Задача 3.** В правоъгълна координатна система са дадени точките  $A(-2; 1)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(4; 3)$ . Намерете координатите на точка  $D$  така, че четирите точки да образуват успоредник.



Фиг. 2

Като използват, че срещуположните страни на успоредник са равни и успоредни и решат модулното уравнение  $|x_D - x_C| = |x_A - x_B|$ , учениците намират две от точките. Те са  $D(0; 3)$  и  $D_1(7; 3)$ , които лежат на права, успоредна на  $AB$  и минаваща през точката  $C$  (фиг. 2) Насочени от първите две задачи, част от учениците се досещат, че може да има и други точки. Тук е добре да насочим вниманието им към положението, което заемат страните на триъгълника  $ABC$  в успоредника. Страната  $AC$  е диагонал в успоредника  $ABCD$  и страна в успоредника  $ABD_1C$ .  $BC$  е страна в успоредника  $ABCD$  и диагонал в успоредника  $ABD_1C$ . Страната  $AB$  е само страна и в двата успоредника и, следователно, логично е да се потърси възможност тя да бъде диагонал на успоредник. Тъй като  $AD \parallel BC$ , то четвъртата точка  $D_2$  лежи на правата  $AD$ . А от успоредника  $ABD_1C$  следва, че  $BD_1 \parallel AC$  и, следователно, точката  $D_2$  лежи на правата  $BD_1$ .

Така учениците получават третата точка  $D_2$  като пресечна точка на правите  $DA$  и  $D_1B$ . От друга страна, като използват, че  $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ , те получават, че точката  $D_2$  може да има ордината само  $y = -1$ . Това показва, че пресечната точка на правите  $DA$  и  $D_1B$  е върху правата  $y = -1$ .

**Задача 4.** В правоъгълна координатна система са дадени точките  $A(-1; 1)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(2; 2)$ . Намерете координатите на точка  $D$  така, че четирите точки да образуват трапец с основа  $AB$  и лице 15.

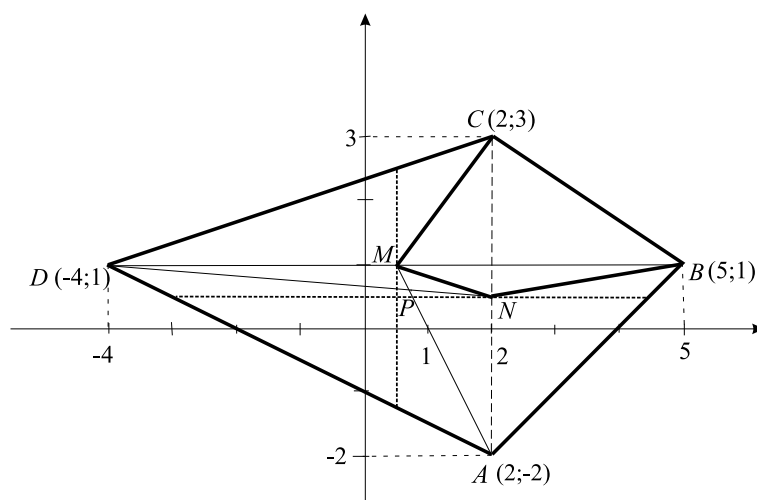
С решаването на задачата учениците се справят самостоятелно и доказват, че има две точки с исканото свойство  $D_1(2; 6)$  и  $D_2(2; -14)$ . Добре е да им обърнем внимание, че поставянето на допълнителни ограничения намалява броя на търсените точки.

Следващата задача е провокирана от задачата за 8 клас, дадена на Първия „Есенен турнир“ проведен в София през ноември 2007.

**Задача 5.** В правоъгълна координатна система са дадени точките  $A(2; -2)$ ,  $B(5; 1)$ ,  $C(2; 3)$ ,  $D(-4; 1)$ .

- Намерете координатите на т.  $M$  среда на  $DB$ .
- Намерете координатите на т.  $N$  среда на  $AC$ .
- Намерете лицето на четириъгълник  $BCMN$ .
- Ако  $DN \cap AM = P$ , докажете че  $S_{APD} = S_{PNBCM}$ .
- Намерете точките, които разделят четириъгълника на две равнолицеве части.

С първите две подусловия децата се справиха сами. В третото подусловие те използваха формулата за лице на четириъгълник с перпендикулярни диагонали. (фиг. 3)



Фиг. 3

За доказателство на подусловие г), използваха познатия от 5 клас „принцип на бояджията“: ако две фигури са равнолицевы и имат обща част, то оставащите „парчета“ също са равнолицевы.

Разглеждат се равенствата  $S_{DABN} = S_{MABC}$  и  $S_{DABN} = S_{APD} + S_{PNBA}$ ,  $S_{MABC} = S_{PNBA} + S_{PNBCM}$ . Така се използва, че  $S_{DAMC} = S_{ABCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{DABN} = S_{DNBC}$ , което показва, че точките  $M$  и  $N$  изпълняват исканото в следващото подусловие. Това помага на учениците да открият, че търсените в д) точки лежат на отсечки през  $M$  и  $N$ , съответно успоредни на  $AC$  и  $DB$ , които са вътре в  $ABCD$ .

Последните две задачи бяха за домашна работа.

**Задача 6.** В правоъгълна координатна система са дадени точките  $A(-2; 2)$ ,  $B(2; 2)$ . Намерете координатите на точки  $C$  и  $D$ , така че четирите точки да са върхове на квадрат.

**Задача 7.** В правоъгълна координатна система са дадени точките  $A(6; 3)$ ,  $B(1; 3)$ . Намерете координатите на точки  $C$  и  $D$ , така че четирите точки да са върхове на успоредник със страна  $AB$  и лице 15. Има ли точки, за които фигурата е правоъгълник?

Задачите за приложение на Декартова координатна система за намиране на геометрични места от точки не са лесни за ученици от 6 клас, но се оказва, че след подходяща подготовка те ги възприемат. Намирането на различно разположени точки, на прави и отсечки, които изпълняват исканите свойства, развива въображението на децата, прави ги по-активни, наблюдателни и търсещи. Обучението в строги доказателства ги мотивира да работят прецизно и да не се доверяват на хипотезите си, преди да ги проверят и докажат.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. ШАРКОВА. Светът в координати. *Математика Плюс* (2007), № 1, 19–22.
- [2] И. ТОНОВ, Т. ТОНОВА. Математика: Учебно помагало за задължително-избираема подготовка – 6 клас. София, Просвета, 2007.

Ирина Петрова Шаркова  
Софийска математическа гимназия  
e-mail: irinasharkova@hotmail.com

## APPLYING CARTESIAN COORDINATE SYSTEM TO FIND LOCI IN 6<sup>th</sup> GRADE

**Irina Petrova Sharkova**

A set of problems has been developed to shape the 6<sup>th</sup> graders' knowledge on Cartesian coordinate system. It was used to find the area of geometric figures and to show students in a natural way how rational numbers may appear in geometry. Such an approach builds connections between algebraic and geometric ideas in the 6<sup>th</sup> grade mathematics curriculum, demonstrates different methods of proof, and develops students' intuition for finding points with specific geometric properties.