МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2012
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2012
Proceedings of the Forty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 9–12, 2012

ЕМПИРИЧНАТА ИНДУКЦИЯ КАТО ЕВРИСТИЧЕН ПОХВАТ В РЕШАВАНЕТО НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ*

Сава Гроздев, Живко Желев

В методиката на обучението по математика се различават два принципно различни типа похвати в дейността "решаване на задачи": алгоритмичен и евристичен. Първият се осъществява от субекта в съответствие с известен на него алгоритъм, а вторият – в съответствие с приета от субекта стратегия за търсене на решение на дадена задача, която съзнателно или несъзнателно се пренася за решаване и на други задачи. Тази статия разглежда конкретен евристичен похват – емпиричната индукция и нейните възможности при решаването на един клас геометрични задачи, свързани с Херонови триъгълници.

Понятието "евристика" се разглежда от няколко науки, при това от различни позиции, което обяснява разнообразните му трактовки. В настоящата статия се ограничаваме с педагогическите измерения относно разбирането на смисъла на евристиката. Известни са опитите на Рене Декарт (1596–1650) и Готфрид Лайбниц (1646–1716) за създаване на стройна система от евристични методи. В [1] се обръща внимание, че в интелектуалната дейност на човека се съдържат истини, които умът открива не въз основа на логически доказателства и разсъждения, а по пътя на своеобразно непосредствено "интелектуално виждане". На по-късен етап известни автори като Бернард Болцано (1781–1848), Херман Хелмхолц (1821–1894), Анри Поанкаре (1854–1912), Жак Адамар (1865–1963) и др. обосновават необходимостта от разкриване на онези компоненти на мисленето, които не подлежат на логическо структуриране и се отнасят към евристичната дейност [2, с. 172]. Става дума за интуицията и способността да се излезе извън пределите на опита (алгоритмите) по пътя на досещането (озарението) и генерирането на образи на неизвестни връзки и закономерности. Приемайки дефиницията от [3, с. 58], под евристика разбираме процеса на търсене на нов продукт на дейността (в случая "решаване на задачи"). Най-общо, "евристиките" или "евристичните похвати" представляват правила и дидактически прийоми, които се прилагат целенасочено за формиране на стратегии за рационално търсене на решения на математически задачи.

[*] **2000 Mathematics Subject Classification:** 97D50.
Ключови думи: емпирична индукция, евристичен похват, Херонов триъгълник.

В някои страни (например Сингапур [9]) обучаването в евристични похвати е задължителен елемент от училищното учебно съдържание и се е превърнало във важен етап от формирането на умение да се решават математически задачи. Учениците от началните и горните класове на средното училище в Сингапур изучават няколко десетки евристични похвати и при завършване на основното си образование полагат изпит, т. нар. PSLE (Primary School Leaving Examination), който съдържа доста "нестандартни задачи", изискващи използването на евристики [9]. В същото време трябва да се отбележи, че теоретически е некоректно да се разглеждат творческото и репродуктивното мислене, основани съответно на евристични и алгоритмични похвати, като противоположни видове. В [4, с. 49] Л. Гурова отбелязва, че при разрешаване на проблемни ситуации човек може да открие различно динамично съотношение между алгоритмичните и евристичните компоненти на процеса на решаване. С други думи, в решаването на една математическа задача основна роля играе прецизният математически алгоритъм, а евристичните похвати подпомагат насочването към него по време на предварителния анализ на задачата. Като цяло обаче въпросът за оценка на ефективността на евристичните похвати и възможностите за целенасоченото им усвояване е доста сложен [5].

Емпиричната индукция е евристичен похват, който може да стои в основата на формулировката на нови хипотези и откриването на нови закономерности. Методът на емпиричната индукция се състои в това, че верността на известен факт се проверява в отделни частни случаи, след което същият факт се обявява за валиден във всички аналогични случаи. Примери в историята на науката за емпирична индукция се срещат много. Така, въз основа на краен брой опити с изгаряния в затворено пространство френският химик Антоан Лавоазие (1743–1794) изказва закона за запазване на веществата: при химическите превръщания нито се губи, нито се създава вещество. След построяването на периодичната система на елементите през 1869 г. Дмитрий Менделеев (1834–1907) също въз основа на емпирична индукция формулира периодичния закон и дотолкова е убеден в неговата валидност, че го използва за коригиране на атомните тегла на редица химически елементи. Така например за индия се е знаело, че атомното му тегло е някое от числата 38,3, 76,6 или 114,9. Ако атомното тегло на индия е 38,3, той би попаднал в групата на алкалните елементи, с които няма общи свойства; ако атомното му тегло е 76,6, той би попаднал на мястото на селена и пак би се различавал по свойства от останалите елементи в тази група; напротив, ако атомното тегло на индия е 114,9, той трябва да попадне в групата на алуминия, с който има общи свойства. Въз основа на своя периодичен закон Менделеев заключава: атомното тегло на индия може да бъде само 114,9.

В математиката и специално в теорията на числата, емпиричната индукция е особено важна както в творчески, така и в обучителен аспект. В същото време са познати много случаи, когато едно твърдение, бидейки вярно за известен, даже твърде голям брой естествени числа, се оказва невярно за всички естествени числа. Например твърдението, че числото n^2-n+41 е просто за всяко естествено число n е вярно за n от 1 до 40, но при $n=41$ се получава съставното число 41^2. Аналогично, числото $n^2-79n+1601$ е просто за всяко естествено число n от 1 до 79, но не е просто при $n=80$, защото тогава се получава отново съставното число 41^2. Нещо повече, както е доказал Леонард Ойлер (1707–1783), в сила е дори следното (доказващо се елементарно) твърдение.

Твърдение. *Не съществува полином $f(x)$ от положителна степен и с цели коефициенти, който за естествени стойности на променливата x приема само прости стойности*[1].

Примерите по-горе показват, че в математиката не е достатъчно да се провери верността на известен факт само върху даден брой частни случаи, колкото и голям да е той. Докато в природните науки като физиката и химията, емпиричната индукция се счита за надежден метод, математиката ѝ отрича каквато и да е друга стойност освен евристична. Във връзка с това известният руски математик и педагог Александър Хинчин (1894–1959) отбелязва, че „само в математиката е възможно – и заедно с това е абсолютно необходимо – да изискваме всички принципни съображения да бъдат изчерпателно *доказани*" [6].

Би било крайност обаче да се счита, че математиката отрича напълно метода на емпиричната индукция. Напротив, математиците я използват твърде често. В много случаи те търсят доказателства на факти, чиято истинност са констатирали само в частни случаи. Пиер Ферма (1601–1665) изказва няколко хипотези, които впоследствие се превръщат в едни от най-известните теореми в теорията на числата. Той например първи прави предположението, че всяко просто число p от вида $4\lambda+1$, $\lambda \in Z^+$ може да се представи като сума на два квадрата, а просто число от вида $4\lambda+3$ не може да се представи като сума на два квадрата. Тази хипотеза е доказана по-късно през 1749 г. от Ойлер, след като по собствените му думи цели 7 години се мъчи да намери доказателство.

Сега ще се опитаме да изведем някои твърдения, свързани с т. нар. *Херонови триъгълници* (по името на древногръцкия математик Херон Александрийски, живял около 10–70 г. от н.е.), използвайки емпирична индукция. *Херонов* е триъгълник, чиито страни и лице са рационални числа. Много често се разглеждат Херонови триъгълници с целочислени страни и лице. Такива триъгълници са обект и на настоящата статия. Макар и да могат да се намерят много Херонови триъгълници, за сега не е известна обща формула, която да описва всички. Съществува обаче един клас Херонови триъгълници, който е доста добре изследван – това е класът на правоъгълните триъгълници. Тъй като катетите и хипотенузата на правоъгълните триъгълници удовлетворяват Питагоровата теорема, то е прието такива тройки от страни да се наричат *Питагорови.* Всяка тройка страни a, b и c на Херонов триъгълник ще означаваме с (a, b, c), а всяка Питагорова тройка – с $[a, b, c]$.

Един от естествените въпроси, който възниква при разглеждането на Херонови триъгълници, е дали не могат да се направят изводи за целочисленост или рационалност на други елементи на триъгълника, като височини, медиани, радиуси на описана и вписана окръжности и т.н. Например Херман Шуберт (1848–1911) твърди в [8], че не съществуват Херонови триъгълници с две рационални медиани. Последното е опровергано през 1997 г. от Ралф Буххолц (1966–) и Рандол Ратбън (1951–) в [7], които съставят следната таблица с две от медианите и лицето на Херонови триъгълници:

[1] Предположението, че функцията $f(x)$ е полином, е съществено. В случая на по-сложни функции твърдението не е вярно. През 1947 г. Робърт Милс (1927–1999) доказва, че цялата част на a^{3^x} е просто число за всяка цяла положителна стойност на x. Малко по-късно американският математик Иван Мортън Нивен (1915–1999) прецизира този резултат: за произволно $c > \frac{8}{3}$ съществува реално число a така, че цялата част на a^{c^x} е просто число за всяка естествена стойност на x.

a	b	c	m_1	m_2	S
73	51	26	$\frac{35}{2}$	$\frac{97}{2}$	420
626	875	291	572	$\frac{433}{2}$	55440
4368	1241	3673	1657	$\frac{7975}{2}$	2042040
14791	14384	11257	$\frac{21117}{2}$	11001	75698280
28779	13816	15155	$\frac{3589}{2}$	21937	23931600
1823675	185629	1930456	$\frac{2048523}{2}$	$\frac{3751059}{2}$	142334216640

Тази таблица може да се разшири. Към днешна дата е известно, че:

1) Съществуват безброй много Херонови триъгълници с 2 рационални медиани. Известни са също следните два факта:

Съществуват безброй много триъгълници с 2 рационални страни, 3 рационални медиани и рационално лице.

3) Съществуват безброй много триъгълници с 3 рационални страни и 3 рационални медиани.

Споменатите по-горе факти се отнасят до трите страни, трите медиани и лицето на един триъгълник, като съществуват безкрайни семейства, за които 6 от тези 7 елемента се изразяват с рационални числа. Ричард Гай (1916–) дефинира понятието "съвършен триъгълник". Това е триъгълник, за който и 7-те елемента се изразяват с рационални числа. Досега не е доказано дали съществуват съвършени триъгълници. Тематиката е изключително интересна и се разширява не само в посока на многоъгълници, които не са триъгълници, но и за пространствени фигури, както и за елементи на триъгълника, различни от медианите: височини, ъглополовящи и други чевиани. Тук ще потърсим връзка на Хероновите триъгълници с радиуса на описаната окръжност R. Ще се ограничим само с триъгълници, чиито страни и лица са целочислени.

Да разгледаме първите правоъгълни Херонови триъгълници и да ги разположим в таблицата по-долу. В нея лицето S и радиусът R са пресметнати с помощта съответно на Хероновата формула $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и формулата $R = \dfrac{abc}{4S}$.

От таблицата се вижда постепенното повишаване на стойностите на радиуса на описаната окръжност, като радиусите са целочислени само в случаите, когато съответният триъгълник е правоъгълен (вж. случаите с тъмен шрифт). Нещо повече, във всеки от случаите на целочислен радиус, изключвайки Питагоровата тройка [12,16,20], този радиус е просто число. Тогава, въз основа на осъществената емпирична проверка в една сравнително обширна група от Херонови тройки, можем да формулираме следната:

Хипотеза. *Всички Херонови триъгълници, чиито радиуси на описаната окръж-*

Херонова тройка	**Лице на триъгълника**	**Радиус на оп. окръжност R**
[3,4,5]	**6**	**2,5**
(5,5,6)	12	3,125
(5,5,8)	12	4,166...
[6,8,10]	**24**	**5**
(10,10,12)	48	6,25
[5,12,13]	**30**	**6,5**
(10,13,13)	60	7,04166...
[9,12,15]	**54**	**7,5**
(4,13,15)	24	8,125
(13,14,15)	84	8,125
(10,10,16)	48	8,33...
[8,15,17]	**60**	**8,5**
(9,10,17)	36	10,625
(16,16,17)	120	9,066...
(15,15,18)	108	9,375
(11,13,20)	66	10,833...
(7,15,20)	42	12,5
[12,16,20]	**96**	**10**
(10,17,21)	84	10,625
(13,20,21)	126	10,833...
[7,24,25]	**84**	**12,5**
(15,15,24}	108	12,5
(20,20,24)	192	12,5
(12,17,25)	90	14,166...
[15,20,25]	**150**	**12,5**
(14,25,25)	168	13,020833...
[10,24,26]	**120**	**13**
(3,25,26)	36	13,54166...
(17,25,26)	204	13,54166...
[16,30,34]	**240**	**17**
[40,42,58]	**840**	**29**

ност са прости числа, са правоъгълни.

Да отбележим, че ако това твърдение е вярно, то за обратното няма как да се твърди същото, тъй като съществуват правоъгълни триъгълници, например (12, 16, 20), чиито целочислени радиуси на описаната окръжност не са прости числа. Оказва се всъщност, че практически не е възможно да бъдат характеризирани Хероновите триъгълници с някакво по-просто аритметично свойство, каквото е например свойството радиусът на описаната окръжност на съответния триъгълник да е просто число. Ще докажем формулираната хипотеза.

Нека (a, b, c) е Херонова тройка и нека радиусът R на описаната окръжност е просто число. От формулата $S = \dfrac{abc}{4R}$ непосредствено следва, че R трябва да дели поне една от страните на триъгълника. Без ограничение нека R/a. В същото време, от синусовата теорема имаме, че $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$. Но R дели a и следователно отношението $\dfrac{a}{R}$ е целочислено. Тъй като $\sin\alpha \in [-1; 1]$, то това отношение може да приема само две стойности: 1 и 2. В първия случай получаваме $R = a$, откъдето $\alpha = 30^\circ$ (респ. $\alpha = 150^\circ$). Това обаче не е възможно, защото $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ е ирационално число, а с помощта на косинусовата теорема за този Херонов триъгълник намираме, че $\cos 30^\circ = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, което е рационално число. Следователно остава само вторият случай, т.е. $\sin\alpha = 1$. Оттук следва, че Хероновият триъгълник е правоъгълен.

Формулираната хипотеза е потвърдена, с което тя се превръща в математически факт. Емпиричната индукция ни помогна да откроим точно онова свойство, което характеризира конкретен клас Херонови триъгълници, а самото доказателство превръща хипотезата в теорема. Ще отбележим, че тази теорема беше дадена като олимпиадна задача (в по-различна формулировка) по време на първия кръг на Втория български фестивал на младите математици, който се проведе през м. септември т. г. в гр. Созопол.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Декарт. Правила для руководства ума. Москва, 1950.

[2] S. Grozdev. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007.

[3] Е. Скафа, В. Милушев. Коструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи. УИ „П. Хилендарски“, Пловдив, 2009.

[4] Л. П. Гурова. Психологический анализ решения задач. Ворон. у-т, Воронеж, 1976.

[5] Ж. Желев. Математическата задача и нейната евристична съставяща в схемите на правдоподобните разсъждения, *Годишник на Пед. Ф-т, ТрУ*, **9** (2009), 5–16.

[6] А. Я. Хинчин. Педагогические статьи. Издательство педагогических наук РСФСР, Москва, 1963.

[7] R. H. Buchholz, R. L. Rathbun. An Infinite Set of Heron Triangles with Two Rational Medians. *Amer. Math. Monthly*, **104** (1997), 107–115.

[8] H. Schubert. Die Ganzzahlligkeit in der Algebraischen Geometrie, In: Festgabe 48 Versammlung d. Philologen und Schulmänner zu Hamburg, Leipzig, 1905, 1–16.

[9] K. Y. Wong. Success and Consistency in the Use of Heuristics to Solve Mathematics Problems. Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 2008, 589–595.

Сава Гроздев
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Живко Желев
Стопански факултет
Тракийски университет
6003 Стара Загора
e-mail: zhelev@uni-sz.bg

EMPIRICAL INDUCTION AS A HEURISTIC METHOD IN MATHEMATICS PROBLEM SOLVING

Sava Grozdev, Zhivko Zhelev

In Mathematics education two principally distinct devices in problem solving are discriminated, namely algorithmic and heuristic ones. The first device is realized by the subject in keeping with a known to him/her algorithm, while the second one – with a strategy, chosen by the subject to solve a given problem and transferred consciously or unconsciously to solve other problems. The present paper considers a particular heuristic device – the empirical induction and its solving potentialities to a class of Geometry problems connected with Heron triangles.