МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2012
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2012
Proceedings of the Forty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 9–12, 2012

НЕОБХОДИМОСТ И ДОСТАТЪЧНОСТ ИЛИ АНАЛИТИЧНО И СИНТЕТИЧНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТЪР*

Юлия Нинова

В статията се разглежда аналогия между етапите на класическата четириетапна схема за решаване на задачи за построение с етапите (необходимост и достатъчност), през които преминава аналитико-синтетичното решение на задачи с параметър.

Мотиви и основания. Понятията *необходимо условие* и *достатъчно условие* са пряко свързани с изучаването на теоремите, а понятието *необходимо и достатъчно условие* е пряко свързано с изучаване на двойка взаимно обратни твърдения. Освен това, характеристичните свойства от определението на едно понятие са *необходимо и достатъчно условие* за неговото съществуване.

Всяко условие, от което следва r, се нарича ***достатъчно условие*** за r, а всяко условие, което произтича от r, се нарича ***необходимо условие*** за r.

Нека разгледаме твърдението $p \to q$. В този случай се казва, че p е *достатъчно условие* за q, а q е *необходимо условие* за p.

Понятията *необходимо и достатъчно условие* са свързани и с понятията анализ на решение на задача и синтетично решение на задача.

Ако откриваме по схемата на Евклид [2] (схема за несвършен анализ) решението на задача със структура $p \to q$, то тези разсъждения се моделират със схемата

$$(1)\qquad \frac{q \to p_k, p_k \to p_{k-1}, \dots, p_2 \to p_1, p_1 \to p}{q \to p}.$$

С тези разсъждения се доказва, че p е необходимо условие за q. За да се докаже верността на обратното твърдение, трябва да се проведат разсъждения по схемата

$$(2)\qquad \frac{p \to p_1, p_1 \to p_2, \dots, p_{k-1} \to p_k, p_k \to q}{p \to q},$$

т.е., да се докаже, че p е достатъчно условие за q. Това е синтетичното решение на задачата.

Понятията *необходимо условие* и *достатъчно условие* са свързани и с решаване на уравнения по метода на еквивалентните преобразувания, което се моделира по следния начин

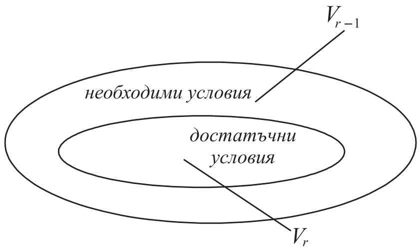
*Ключови думи: необходимо условие, достатъчно условие, анализ на решение на задача, синтетично решение на задача.

$$A(x) \Leftrightarrow A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_{r-1}(x) \Leftrightarrow A_r(x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_k(x), \quad [8]$$

или по метода на нееквивалентните преобразувания, което се моделира по следния начин:

$$A(x) \Leftrightarrow A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_{r-1}(x) \Rightarrow A_r(x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_k(x). \quad [8]$$

Ако $A_{r-1}(x) \Leftrightarrow A_r(x)$, то $V_{r-1} = V_r$, където с V е означено множеството на вярност на съответния предикат. Това означава, че A_{r-1} е необходимо и достатъчно условие за A_r.



Ако $A_{r-1}(x) \Rightarrow A_r(x)$, то $V_{r-1} \subset V_r$ и това означава, че A_{r-1} е достатъчно условие за A_r, а A_r необходимо условие за A_{r-1}. Следствието между двата предиката води до получаване на необходими условия. Проверката (както постъпваме обикновено при решаване на ирационални уравнения) или синтетичното решение на задачата стеснява кръга от необходими условия до намирането на достатъчните условия, удовлетворяващи условието на задачата.

Според [3], [6] и [7] решението на всяка задача може да се проведе от „необходимо условие към достатъчно условие“, т.е. да се осъществи с провеждане на аналитико-синтетични разсъждения по описаните по-горе две схеми (1) и (2). За едни задачи този подход е оправдан, а за други – не. В едни случаи се достига веднага до достатъчните условия и решението се представя синтетично. Така се постъпва например при решаване на параметрични уравнения, свързани с разположението на корените на квадратен тричлен спрямо едно или две числа, защото теоремите, които се прилагат, осигуряват и необходими, и достатъчни условия за съответното изискване.

При решаване на други задачи, след като с анализ са открити необходимите условия, то постепенно този кръг се стеснява чрез синтетичното решение, за да се намерят достатъчните условия, които удовлетворяват условието на задачата. Нещо повече, авторът на [4] прави аналог между етапите на класическата четириетапна схема за решаване на задачи за построение, утвърдена от древните гърци, с етапите, през които преминава решаването на задачите с параметри. А именно: а) *анализ* – съставяне на уравнение или на система; б) *построение* – решаване на съставеното уравнение или на съставената система; в) *изследване* – изследване дали намереното решение на съставеното уравнение или на системата удовлетворява наложените върху модела ограничения. Това са необходимите условия, които трябва да удовлетворяват търсените решения; г) *доказателство (синтез)* – установяване, че намерено решение на съставеното уравнение или система се явява отговор на задачата. За да бъде намерено решението-отговор на задачата, е достатъчно то да удовлетворява наложените на модела условия. Според съвременният поглед към класическата четириетапната схема за решаване на задачи за построение, описан в [1], анализът има евристична роля и затова той не представлява формално-логическа част от решението на задачата. Освен това на този етап би следвало да се установят и всички възможни взаимни положения на дадените елементи. Тогава съществени остават етапите построение и доказателство.

Според аналогията на Гибш при решаване на задачи с параметър на тези етапи съответстват етапът решаване на съставеното уравнение или система (*построе-*

ние+изследване) и доказателство (*синтез*). Решаването на различни типове задачи с параметър започва с допускането, че исканото условие е изпълнено, т.е. разсъжденията се провеждат по схема (1). С анализа на решението на задачата се показва как се откриват стойностите на параметъра, измежду които са и търсените стойности, ако има такива. Следвайки описаната аналогия, би следвало и тук, при решаването на задачи с параметър, да се изпуска анализът, т.е. необходимостта, а да остане само синтетичното решение на задачата, т.е. доказване на достатъчността. За относителния дял на тази част от решението на задачата също може да се съди по критериите за оценка на решения на такива задачи, предлагани в [9] (виж примера). От тях се вижда, че получаването само на необходимите условия носи една четвърт от общия брой точки за пълното и обосновано решение на задачата. Обаче, разсъждения, проведени по схемата на несъвършения анализ, изискват представяне и на синтетичното решение на задачата, т.е. провеждане на разсъждения по схема (2). Критериите показват, че и в този случай тежестта при оформяне на резултата пада върху доказване на достатъчността, т.е. върху синтетичното решение на задачата.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания C5
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Ответ получен, решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности, в результате которых ответ может быть неверным.
2	Верно получены необходимые условия на значения a, однако в проверке достаточных условий допущены ошибки.
1	Получены только необходимые условия на значения a.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Подготовката на учениците да извършват аналитико-синтетични разсъждения при решаване на параметрични уравнения, неравенства или системи от такива не е достатъчна. Затова може би и в част от решенията на кандидат-студентите се среща доказване само на необходимостта, но не и на достатъчността. В представени решения на конкурсни задачи не се забелязва явно разграничаване на двете части от решението на задачата. За да могат да се разберат тези решения е необходимо съзнателно и целенасочено обучение на учениците върху структурата на решенията на тези задачи.

Типове задачи с параметър. В пособия за подготовка за конкурсни изпити или в теми за конкурсни изпити се срещат различни типове задачи, решението на които изисква провеждане на разсъждения по описаните по-горе схеми.

Някои типове параметрични задачи, които водят задължително до аналитико-синтетични разсъждения при откриване на техните решения, описани в [5], [7] или давани на конкурсни изпити, са:

а) параметрични уравнения, неравенства или системи от такива, в които участват четни функции и се изисква единственост на решението. За да бъде удовлетворено условието за единственост на решението е необходимо двойка симетрични точки спрямо оста Ox или спрямо оста Oy да съвпадат, т.е. точката да лежи на оста на симетрия. Това условие очевидно не е достатъчно, защото върху оста на симетрия лежат безброй много точки с координати $(x_i, 0)$ или $(0, y_i)$.

б) задачи, при които се изисква уравнението, неравенството или система от такива да бъде изпълнено за всяка стойност на неизвестното от някакво множество. Тогава се избира една точка и се замества с тази точка в съответния предикат. Така се получават стойности на параметъра, сред които са и търсените или търсената стойност. След този анализ трябва да последва синтез, т.е. да се намерят достатъчните условия.

в) задачи, при които се изисква уравнение да има определен брой корени.

г) задачи за квадратно уравнение, свързани с приложение на формулите на Виет.

д) задачи за екстремуми на функции.

е) задачи за равносилност или следствие на уравнения или неравенства.

Необходими знания и умения за възприемане на решенията на тези типове задачи: понятията „необходимо условие“ и „достатъчно условие“; графична интерпретация на тези понятия на езика на множествата; умение да се мисли на два езика – алгебричен и геометричен; умение за аналитично решаване на уравнения с параметър; умение за използване на свойства на функции, свойства на релации; умение за графично решаване на уравнения с параметър; умение да се използва схемата на Евклид за анализ на решение на задача.

Примери. Разглеждането на тези сложни в логическо отношение задачи не е цел на училищния курс по математика. Въпреки това, задачи, подобни на тези, се появят в теми за конкурсен изпит или в пособия за подготовка за конкурсен изпит.

Задача 1. *За кои стойности на реалния параметър а системата* $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = a \\ x - \sin^2 y = 3 \end{array} \right.$ *има единствено решение*?

Решение – необходимост/анализ на решението на задачата. Тъй като функциите, чиито аналитични изрази са левите страни на двете уравнения от системата, са четни относно неизвестното y, то ако y_0 е решение и $-y_0$ е решение. Тъй като решението е единствено, то оттук следва, че $y_0 = 0$. Тези разсъждения осигуряват необходимо условие за единственост на решението на уравнение от вида $F(x, 0, a) = 0$ [7], защото системата може да има няколко решения от вида $(x_i, 0)$. Тогава от второто уравнение на системата следва, че $x_0 = 3$. В резултат на намерената стойност на неизвестното x се налагат нови необходими условия за параметъра от уравнението $F(3, 0, a) = 0$. [7]. От първото уравнение на системата следва, че $a = 9$. С разсъжденията дотук доказахме, че ако наредената двойка $(3, 0)$ е единственото решение на системата, то $a = 9$. Тези разсъждения са проведени по схема (1).

Но ние се интересуваме от верността на обратното на това твърдение, т.е дали при $a = 9$ дадената система има единствено решение.

Достатъчност/синтетично решение на задачата. При $a = 9$ системата добива вида

$$(*) \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ x - \sin^2 y = 3. \end{array} \right.$$

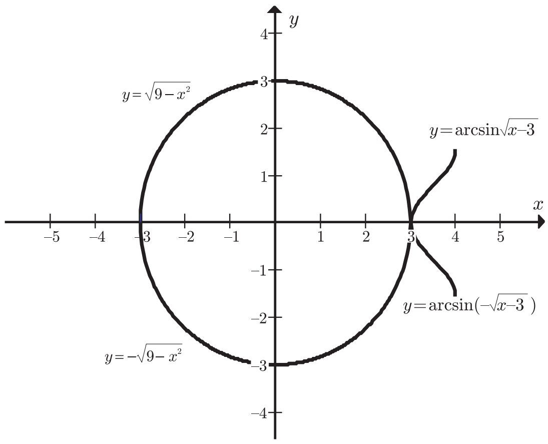
Тази система не може да се реши по познатите на учениците алгоритми за решаване на системи от две уравнения с две неизвестни. Затова в този случай се подхожда по следния начин. От второто уравнение на системата се получава, че

$$(3) \qquad x = \sin^2 y + 3 \geq 3,$$

защото $\sin^2 y \geq 0$. От първото уравнение на системата (*) се получава

$$(4) \quad x^2 = 9 - y^2, \ x^2 \leq 9, \ -3 \leq x \leq 3.$$

От изводите (3) и (4) и антисиметричността на релацията „$\leq$“ следва, че единствената стойност за неизвестното x е 3. Тогава от първото уравнение на системата (*) следва, че $y = 0$.



Следователно при $a = 9$ дадената система има единствено решение – наредената двойка $(3, 0)$. Това разсъждение е проведено по схема (2).

Решението на задачата е представено графично на чертежа.

Задача 2. *Да се намерят стойностите на реалния параметър k, за които уравнението $\sqrt{x^2 + k\cos^2 x} = k$ има единствен реален корен.* (КСК, задача 10, СУ „Св. Кл. Охридски“, 24.07.2008 г.)

Решение – необходимост/анализ на решението на задачата.* От условието следва, че $k \geq 0$. Ако x_0 е решение на даденото уравнение, то и $-x_0$ е решение, защото $\sqrt{(-x)^2 + k\cos^2(-x)} = \sqrt{x^2 + k\cos^2 x} = k$ и функцията е дефинирана в симетричен интервал относно началото на координатната система.

Следователно, за да има единствен реален корен, е **необходимо** $x_0 = -x_0$, т.е. $x_0 = 0$. Следователно $\sqrt{k} = k$, т.е. $k = 0$ или $k = 1$.

Достатъчност/синтетично решение на задачата. При $k = 0$ получаваме уравнението $\sqrt{x^2} = 0$, което има единствен реален корен $x = 0$.

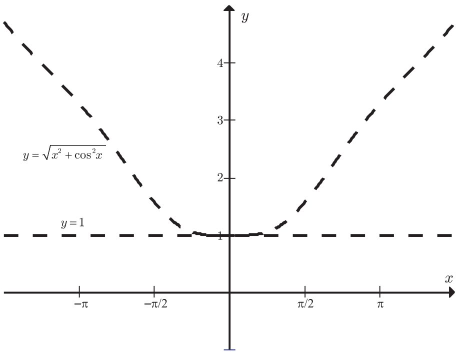
При $k = 1$ получаваме уравнението $\sqrt{x^2 + \cos^2 x} = 1$ или $x^2 = \sin^2 x$, което също има единствен реален корен $x = 0$, защото неравенството $\sin^2 x < x^2$ е изпълнено за всяко $x \neq 0$.

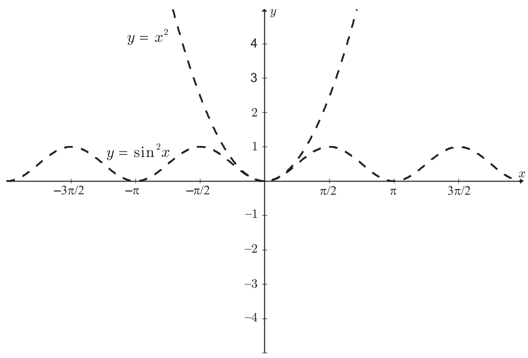
Следователно търсените стойности са $k = 0$ и $k = 1$.

В предложеното авторско решение явно е обявено, че намерените стойности на параметъра се явяват необходимо условие за единственост на корена на даденото уравнение, открити с анализа на решението на задачата. Не е посочено явно необходимостта ***от доказване*** на обратното твърдение, т.е. необходимостта от оформяне

---

*Структурното разграничаване на оригиналните авторски решения на разгледаните задачи е направено от автора на статията.





на синтетичното решение на задачата. Сложната логическа структура и липсата на предварителна подготовка на учениците за решаване на този тип задачи изисква по-обосновано изясняване на структурата на решението на задачата.

Задача 3. *Да се намерят стойностите на реалните параметри b и c, за които неравенството* $\left|8x^2+bx+c\right|\le 1$ *е изпълнено за всяко число x от интервала* $[0;1]$. (КСК, задача 10, СУ „Св. Кл. Охридски“, 25.07.2006 г.)

Решение – необходимост/анализ на решението на задачата. Нека неравенството $\left|8x^2+bx+c\right|\le 1$ е изпълнено за всяко$x\in[0;1]$. Тогава то е изпълнено при $x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$ и $x=1$, т.е. $|c|\le 1$, $\left|2+\dfrac{b}{2}+c\right|\le 1$ и $|8+b+c|\le 1$. Тези неравенства са равносилни съответно с

$$-1\le c\le 1, \tag{5}$$

$$-6\le b+2c\le -2 \tag{6}$$

и

$$-9\le b+c\le -7. \tag{7}$$

Лявото неравенство (6) е $b+2c\ge -6$, а дясното неравенство (7) е равносилно с $-b-c\ge 7$. Събираме почленно тези две неравенства и получаваме $c\ge 1$. От друга страна $c\le 1$ от (5). Следователно $c=1$. При $c=1$ неравенството $b+2c\ge -6$ става $b\ge -8$, а неравенството $-b-c\ge 7$ става $-b\ge 8$, т.е. $b\le -8$. Следователно $b=-8$.

Достатъчност/синтетично решение на задачата. Остава да докажем, че при $b=-8$ и $c=1$ условието на задачата действително е изпълнено, т.е. че неравенството $\left|8x^2+bx+c\right|\le 1$ е изпълнено за всяко $x\in[0;1]$. Имаме

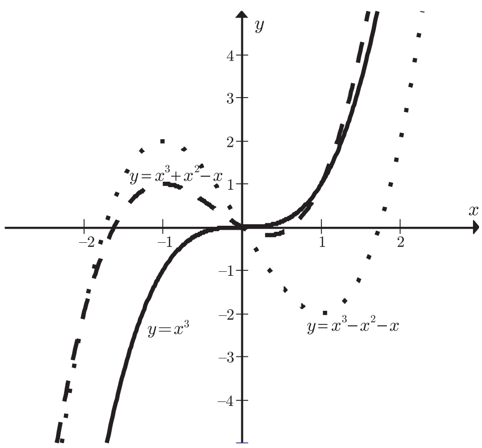
$$\left|8x^2-8x+1\right|\le 1 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 8x^2-8x+1\ge -1 \\ 8x^2-8x+1\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (2x-1)^2\ge 0 \\ x\,(x-1)\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[0;1]\,.$$

Така неравенството $\left|8x^2+bx+c\right|\le 1$ наистина е изпълнено за всяко $x\in[0;1]$ (***и само за тези x***). Следователно търсените стойности на параметрите са $b=-8$ и $c=1$.

В представеното авторско решение на тази конкурсна задача обученият лесно може да разграничи анализа от синтеза, т.е. доказването на необходимостта и достатъчността. Намерените две стойности на параметъра се явяват необходимо и достатъчно условие за изискването в задачата. Този факт е представен от авторите на решението с подчертания курсивен текст. Само тези кандидат студенти, които добре разбират същността на тези разсъждения и логическата структура на решението на задачата, могат да разберат мястото на този текст в решението на задачата.

Задача 4. *Да се намерят реалните числа a и b, ако е известно, че уравнението $x^2+ax+b=0$ има реални корени x_1, x_2 такива, че* $5x_1^2+5x_2^2=4a-6b+1$. (КСК, задача 8, СУ „Св. Кл. Охридски“, 28.03.2010 г.)

Решение – необходимост/анализ на решението на задачата. Тъй като уравнението $x^2+ax+b=0$ има реални корени, то $D=a^2-4b\geq 0$. По формулите на Виет намираме $5x_1^2+5x_2^2=5\left(x_1+x_2\right)^2-10x_1x_2=5a^2-10b$. Оттук $5a^2-10b=4a-6b+1$ или $5a^2-4a+1=4b$. Но $4b\leq a^2$, така че $5a^2-4a+1\leq a^2$, т.е. $(2a-1)^2\leq 0$. Следователно $a=\dfrac{1}{2}$ и $b=\dfrac{1}{16}$.



Достатъчност/синтетично решение на задачата. При $a=\dfrac{1}{2}$ и $b=\dfrac{1}{16}$ уравнението има корени $x_1=x_2=-\dfrac{1}{4}$, за които $5x_1^2+5x_2^2=\dfrac{5}{8}=4.\dfrac{1}{2}-6.\dfrac{1}{16}-1$.

Задача 5. *Дадена е функцията $f\left(x\right)=x^3-ax^2+abx$, която при $x=a$ има локален минимум, чиято стойност е равна на b. Да се намерят числата a и b.* (КСК, задача 6, СУ „Св. Кл. Охридски“, 25.07.2006 г.)

Решение – необходимост/анализ на решението на задачата. От условието на задачата имаме

$$\left|\begin{array}{l} f\left(a\right)=b \\ f'\left(a\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2b=b \\ a^2+ab=0. \end{array}\right.$$

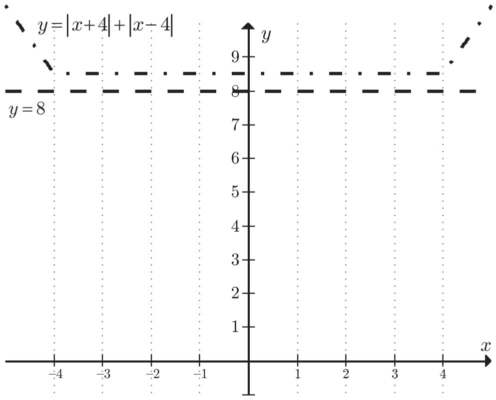
Решенията на последната система са: $a=0$, $b=0$; $a=-1$, $b=1$ и $a=1$, $b=-1$.

Достатъчност/синтетично решение на задачата. Числата $a=0$, $b=0$ не са решение на задачата, защото $f\left(x\right)=x^3$ е растяща функция и няма локален екстремум. Числата $a=-1$, $b=1$ също не са решение на задачата, защото функцията $f\left(x\right)=x^3+x^2-x$ при $x=-1$ има локален максимум, а не минимум. Функцията $f\left(x\right)=x^3-x^2-x$ при $x=1$ има локален минимум, равен на -1. Следователно $a=1$, $b=-1$ са единственото решение на задачата.

В авторското решение на тази задача само добре обученият може да разграничи анализа от синтеза, защото това не е маркирано словесно в решението. Забелязва се една последователност при използване на задачи за конкурсен изпит, структурата на решенията на които е една и съща.

Задача 6. *За кои стойности на реалния параметър a са равносилни неравенството $\sqrt{2x+8}\geq x$ и уравнението $|x+a|+|x+4|=8$?*

Решение – необходимост/анализ на решението на задачата. Решението на неравенството е $x\in[-4;4]$. Следователно необходимо е числата от този интервал да са решения и на уравнението. Ако $x = 0$ е решение на уравнението, то $|a| + |4| = 8$ или $a = \pm 4$.



Достатъчност/синтетично решение на задачата. Ако $a = 4$, уравнението добива вида $2\,|x + 4| = 8 \Leftrightarrow |x + 4| = 4$. Решенията на това уравнение са числата 0 и -8. За тази стойност на параметъра уравнението не е равносилно на неравенството. Ако $a = -4$, уравнението добива вида $|x - 4| + |x + 4| = 8$ и неговото решение е $x \in [-4; 4]$. За тази стойност на параметъра уравнението е равносилно на неравенството. Следователно $a = -4$ е решението на задачата.

Заключение. Общото, което се забелязва от решенията на разгледаните няколко задачи, е, че с доказване на необходимостта се извършва анализ на решението на задачата по схемата на Евклид. Тъй като това е схема на несъвършен анализ, то синтетичното решение на задачата е задължителна част от нейното решение. С тази част се доказва достатъчността на даденото в задачата условие.

Налагането на ограничения за параметрите или за корените на уравнения, неравенства или системи от такива, налагането на условия от вида на необходими или (и) достатъчни, изисква сериозна математическа и логическа култура и подготовка на учениците.

Описаната сложна логическа структура на решението на тези задачи обяснява част от затрудненията на учениците при решаване им. Друга част от затрудненията се дължат или на използване на познати, но малко упражнявани знания за понятия или методи, или на използване на подходи, които нямат алгоритмичен характер за учениците.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Выгодский, В. Л. Рабинович. Некоторые принципиальные вопросы, связанные с решением конструктивных задач. *Математика в школе*, **4** (1965), 27–35.

[2] Ив. Ганчев и др. Методика на обучението по математика (обща част). Благоевград, 2002.

[3] Ив. Ганчев. За математическите задачи. Народна просвета, София, 1976.

[4] И. А. Гибш. Исследование решений задач с параметрическими данными. Издательство Академии Педагогический Наук РСФСР, Москва, 1952.

[5] П. И. Горнщейн, В. Б. Полонски, М. С. Якир. Задачи с параметрами. Академично издателство „проф. М. Дринов“, С., 1996.

[6] Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. Наука, Москва, 1970.

[7] С. П. Хэкало. Необходимые и достатъчные условия в задачах с параметрами. *Математика в школе*, **7** (2003), 20–23.

[8] V. Gogovska. Analytic Methods – Useful Tool for Obtaining Long-Lasting Structural Knowledge. *Математика и математическо образование*, **40** (2011), 356–362.
[9] http//www1.ege.edu.ru/files/demo/demo_2011

Юлия Димитрова Нинова
Факултет по математика и информатика
Софийски университет „Св. Кл. Охридски“
бул. Джеймс Баучър, 5
1164 София
e-mail: julianinova@hotmail.com

NECESSITY AND SUFFICIENCY, OR ANALYTICAL AND SYNTHETIC SOLUTION OF PARAMETRIC PROBLEMS

Julia Ninova

This article discusses the analogy between the stages of the classical four-stage procedure of solving construction problems with the stages (necessity and sufficiency) intrinsic to the analytical-synthetic solution of parametric problems.