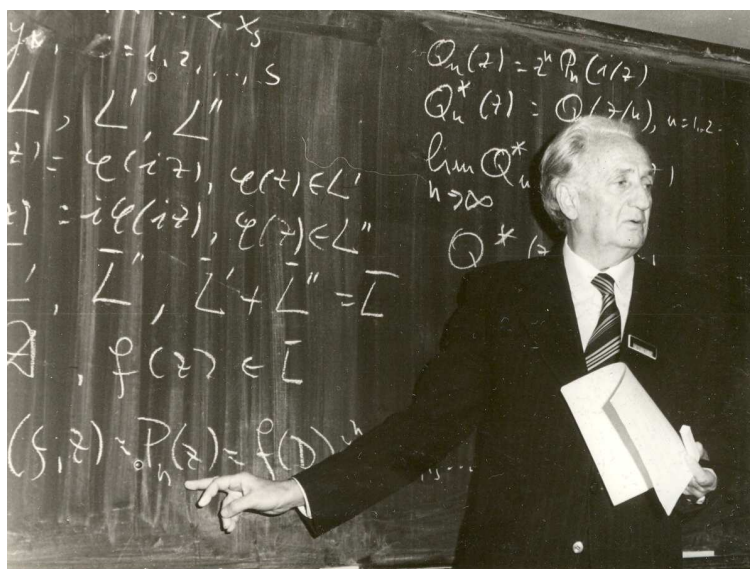


MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013

АКАДЕМИК ЛЮБОМИР ИЛИЕВ
И КЛАСИЧЕСКИЯ КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ

Петър Русев



Академик Любомир Георгиев Илиев е роден през 1913 г когато се навършват 25 години от учредяването на първото ни „Висше училище“ и 10 години след преименуването му в Университет. През следващата 1914 г са хабилитирани като доценти във Физико-математическия му факултет бъдещите академици Кирил Попов, Иван Ценов и Любомир Чакалов, наследници и продължители на делото на пионерите на висшето образование по математика в нашата страна Емануил Иванов, Марин Бъчеваров, Атанас Тинтеров, Спиридон Ганев и Антон Шоурек. След 8 години техен колега и също бъдещ академик, става Никола Обрешков.

Защитилите докторски тези в европейски университети, Попов и Чакалов пренасят и духа на култивиране на математическата наука в най-престижните научни центрове по онова време. Ръководените от тях научни семинари и с активното участие в тях на Обрешков още от студентските му години, стават инкубатори на млади ентузиаста – бъдещи преподаватели в Софийския Университет и във възникващите

Висши технически учебни заведения. Един от тях е Любомир Илиев, един от най-талантливите им последователи, един от най-ярките от третото поколение български математици.

В мемоара си *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse*, *Mnatsber. der Königl. Preuss. Akad. der Wiss. zu Belrn aus dem Jahr 1859* (1860), 671–689, Б. Риман изказва знаменитата хипотеза за нетривиалните нули на функцията $\zeta(s)$, която и досега нито е доказана нито опровергана, а именно че те са върху правата линия $Re\ s = 1/2$. Тя е еквивалентна с хипотезата, че дефинираната от него цяла функция

$$\xi(z) = s(s-1)\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad s = 1/2 + z,$$

има само реални нули.

В края на 19-тия и най-вече в първите десетилетия на 20-тия век усилията на редица, в това число и първокласни математици като Йенсен, Пойа, Харди и Тичмарш, се насочват към проблема за разпределението на нулите на цели функции дефинирани като преобразования на Фурие от вида

$$\int_a^b F(t) \exp(izt) dt, \quad -\infty \leq a < b \leq \infty.$$

Безспорен стимул за това е представянето на Риман на функцията ξ като такова преобразование с четна функция F в интервала $(-\infty, \infty)$.

Тази тематика привлича вниманието на Чакалов и Обрешков. На тях дължим първите публикации у нас в това направление повлияни от резултатите на Пойа за разпределението на нулите на целите функции от вида

$$\int_{-a}^a f(t) \exp(izt) dt, \quad 0 < a < \infty$$

и частните им случаи

$$(1) \quad \int_0^a f(t) \cos zt dt$$

и

$$(2) \quad \int_0^a f(t) \sin zt dt.$$

Това направление става област на интензивни изследвания и на академик Илиев, резултат на които са публикациите му включени в първия раздел на Сборника от избрани негови трудове.

Съществена роля в трудовете на Пойа, отнасящи се до нулите на целите функции от вида (1) и (2), играе алгебричен резултат най-често наричан теорема на Какейа, съгласно който ако $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, нулите на полинома

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k$$

са в единичния диск, т.е. в областта $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. С негова помощ Пойа получава знаменития си резултат за реалност и взаимно разделяне на нулите на целите функции (1) и (2) при условие, че функцията f е положителна и растяща в интервала $(0, a)$. Същата „технология“ е ангажирана от Чакалов и Обрешков.

На академик Илиев дължим друг подход към проблема за разпределение на нулите на целите функции (1) и (2). Той се опира на твърдението му, че ако нулите на алгебричния полином P от степен $n \in \mathbb{N}$ са в областта $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ и P^* е полиномът дефиниран с $P^*(z) = z^n \overline{P(1/\overline{z})}$, нулите на полинома

$$P(z) + \gamma z^k P^*(z), \quad |\gamma| = 1, k \in \mathbb{N}_0,$$

са върху единичната окръжност [1, Hilfsatz]. Това твърдение, както и сполучливото привличане на един алгебричен резултат на Обрешков, води до едно от най-съществените постижения на академик Илиев. То гласи, че ако f е положителна и растяща функция в интервала $(0, a)$, $0 < a < \infty$ и нулите на алгебричния полином $p(z)$ са в ивицата $\{z \in \mathbb{C} : \lambda \leq \Re z \leq \mu\}$, $-\infty \leq \lambda \leq \mu \leq \infty$, нулите на полинома

$$\int_0^a f(t) \{p(z+t) + \gamma p(z-t)\} dt, \quad |\gamma| = 1,$$

са в същата ивица [2]. Класическите резултати на Поя се получават чрез граничен преход приложен към случаите когато $p(z) = z^n$, $\lambda = \mu = 0$ и $\gamma = \pm 1$. Наистина, тогава полиномите

$$P_n(f; z) = \int_0^a f(t) \left\{ \left(1 + \frac{izt}{n}\right)^n + \gamma \left(1 - \frac{izt}{n}\right)^n \right\} dt \quad n \in \mathbb{N},$$

имат само реални нули и, освен това,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f; z) = \int_0^a f(t) \{\exp(izt) + \gamma \exp(-izt)\} dt$$

равномерно върху всяко ограничено подмножество на $\mathbb{C}$.

Публикацията [3] в обем от само три страници е реализация на една от най-плодотворните идеи на академик Илиев. Тя е посветена на класа $E(a)$ на целите функции от вида (1), които имат само реални нули. В нея с $A(a)$, $0 < a < \infty$, е означен класа на четните реални функции $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такива че $x(a) = 0$ и $x'(it)$, $t \in \mathbb{R}$ е ограничение до реалната ос на цяла функция от класа на Лагер-Поя, т.е. тя е или алгебричен полином със само реални нули или равномерна граница на такива полиноми.

Един остроумен алгоритъм осигурява „възпроизвеждане“ на този клас (Satz I). Първото приложение на това твърдение е, че ако $x(t) \in A(a)$, $x(0) > 0$ и $\lambda > -1$, цялата функция

$$\int_0^a x^\lambda(t) \cos zt dt$$

има само реални нули. Частният случай $x(t) = 1 - t^{2q}$, $q \in \mathbb{N}$ води до резултат на Поя, съгласно който цялата функция

$$\int_0^1 (1 - t^{2q}) \cos zt dt$$

има само реални нули.

Следващото приложение е едно от най-значимите постижения на академик Илиев, а именно Satz II, съгласно което ако $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ е реална, неотрицателна и четна функция, такава че $\varphi'(it)$ е ограничение до реалната ос на функция от класа на Лагер-Поя, цялата функция

$$\int_0^\infty \exp(-\varphi(t)) \cos zt dt$$

има само реални нули. Функцията $a \cosh z$, $a > 0$ удовлетворява условията на Satz II, което води до известния резултат на Поја за реалност на нулите на цялата функция

$$\int_0^\infty \exp(-a \cosh t) \cos zt \, dt.$$

На Вайерштрас дължим първият пример на степенен ред с ненулев и краен радиус на сходимост, който е непродължим вън от кръга му на сходимост, т.е. този кръг е областта на съществуване на аналитичната функция дефинирана от сумата му. Този пример става мощен стимул за многочислени изследвания върху особените точки на функции дефинирани със сходящи степенни редове и аналитичната им непродължимост вън от кръга им на сходимост.

Приносителите на академик Илиев в това направление са получени главно под влиянието на резултатите на такива експерти в областта на класическия комплексен анализ като Адамар, Островски, Фабри и Сегьо. На последния дължим, че ако коефициентите на степенния ред

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

приемат краен различни стойности, т.е. всеки от тях е равен на някое от числата $d_1, d_2, \dots, d_s$, $d_j \neq d_k, j \neq k$, тогава или той е аналитично непродължим вън от единичния диск, или е маклореновият ред на рационална функция от вида

$$\frac{P(z)}{1 - z^m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

което е възможно само когато редицата от коефициентите му е периодична след някой индекс.

Съществени обобщения, разширения и модификации на този резултат са получени от академик Илиев. Съответните резултати са поместени в трудовете му включени във втория раздел на Сборника от избрани негови трудове. Типичен такъв е твърдението за редовете (3) с коефициенти от вида $a_n = \gamma_n c_n, n \in \mathbb{N}_0$. Ако членовете на редицата $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ приемат краен брой стойности, а редицата $\{c_n n^{-\alpha}\}$ има краен брой и различни от нула гранични точки за някое $\alpha \in \mathbb{R}$, тогава изискването за неперодичност след всеки индекс на редицата $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ е достатъчно условие за аналитичната непродължимост на степенния ред (3) [4]. Изглежда, че академик Илиев е първият, който получи резултати от типа на Сегьо за редове на Дирихле. Те се отнасят до особените точки в околност на абсцисата на сходимост на редовете от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n c_n \exp(-\lambda_n s)$$

и са поместени в публикацията [5].

В първите десетилетия на миналия век под влиянието на резултати на немските математици Кюбе и Бибербах започва интензивното развитие на област от геометричната теория на аналитичните функции, която се обособява като теория на еднолистните функции. Основният обект на изследванията в това направление е класът S на функциите f , които са холоморфни и еднолистни в единичния диск и

нормирани с изискванията $f(0) = 0, f'(0) = 1$, т.е. това са функциите с маклореново развитие

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

в единичния диск, такива че $f(z_1) \neq f(z_2)$ щом $z_1 \neq z_2$ са от този диск. Изследват се и различни подкласи на S , дефинирани напр. с допълнително изискване за изпъкналост респ. звездност относно точката $z = 0$ на образа на единичния диск чрез функция $f \in S$. Централно място в изследванията, концентрирали усилията на не малък брой специалисти, заемат теоремите за деформацията и коефициентните оценки. Прочутата хипотеза на Бибербах, че $|a_n| \leq n, n = 2, 3, 4, \dots$, която „стоя“ открита близо 50 години до потвърждаването ѝ от Луи де Бранж, беше един от стимулите за появата на голям брой публикации в най-реномирани списания и издания. С направлението освен Кюбе и Бибербах са свързани изследователи като Литълвуд, Хейман, Льовнер, Сегьо, Голузин и много други.

Академик Илиев не остана безучастен и към това направление. Резултатите включени в третия раздел на Сборника се „раждат“ буквално за няколко години. Главното внимание на автора им е било насочено към класа S_k на k -симетричните функции f_k от класа S , т.е. към тези от тях, чието маклореново развитие има вида

$$(4) \quad f_k(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(kn+1)} z^{kn+1}$$

Един от първите резултати на академик Илиев е повлиян от теорема на Сегьо за разделената разлика на функциите от класа S . Удачното ангажиране на аналогична теорема на Голузин за класа Σ от функциите f мероморфни и еднолистни в областта $(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) \cup \{\infty\}$ и нормирани с $f(\infty) = \infty, f'(\infty) = 1$, го води до неравенствата

$$(5) \quad \frac{1-r^2}{(1+r^2)^{4/k}} \leq \left| \frac{f_k(z_1) - f_k(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \frac{1}{(1-r^2)(1-r^k)^{4/k}},$$

валидни за всяка функция $f_k \in S_k$ при условие, че $0 < |z_j| \leq r < 1, j = 1, 2, z_1 \neq z_2$ [6, Theorem I]. Още в тази публикация се проявява „силата“ на тези неравенства и по-конкретно на лявата им част. Тяхно приложение е, че точният радиус на еднолистност на парциалните суми

$$(6) \quad \sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3^{(2)} z^3 + \dots + a_{2n+1}^{(2)} z^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

на функциите от класа S_2 , т.е. на нечетните функции от класа S , е $1/\sqrt{3}$ [6, Theorem II].

Друго приложение е, че парциалната сума

$$\sigma_n(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

на функция от класа S е еднолистна в кръга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - 44 \log n/n\}$ за всяко $n \geq 15$ [6, Theorem II], което прецизира резултат на В. Левин [6, Theorem (L)]. Аналогичен резултат за парциалната сума (6) на функция от класа S_2 е, че тя е еднолистна в кръга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{1 - 3 \log n/n}\}$ за $n \geq 12$ [6, Theorem IV], [7].

Решението на проблема за радиуса на еднолистност на парциалните суми

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \dots + a_n^{(3)} z^{3n+1}$$

на 3-симетричните функции, третиран в публикациите [8, 9, 10] на академик Илиев, е че за $n \neq 2$ той е $\sqrt[3]{3}/2$. Доказателствата се опират както на коефициентните оценки за функциите от класа S_3 [8, Theorem I], така и на лявото неравенство в (5). За $n = 2$ валидността му е доказана директно с метода на Льовнер [11].

При допълнителното изискване функцията $f_k \in S_k$ да е изпъкнала, е получено неравенството

$$\left| \frac{f_k(z_1) - f_k(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \frac{1 - r^2}{(1 + r^k)^{2/k}}$$

при условие, че $|z_j| \leq r$, $0 < r < 1$, $j = 1, 2$, $z_1 \neq z_2$. То е точно за $k = 1, 2$, т.е. за функциите от класа S , както и за нечетните функции от този клас [12, Теорема II]. С негова помощ е намерен кръга, дефиниран с неравенството $|z| < \{1 - (1 + 2/k) \log(n+1)/(n+1)\}^{1/k}$, в който парциалната сума

$$z + a_1^{(k)} z^{k+1} + \dots + a_n^{(k)} z^{nk+1}$$

на f_k е еднолистна за всяко $n > \exp\{k\sqrt{2k}(2+k)\} - 1$ [12, Теорема III]. Получено е и неравенство за разделената разлика на ограничените функции от класа S_k [13, (III)], т.е. за тези функции $f_k \in S_k$, за които $f_k(D)$ е ограничена област.

Изтъкнатите приноси на академик Любомир Илиев, както и много други резултати в това число за неравенствата на Хамбургер и Туран, за проблема на Помпейю и числения метод породен от итерациите на Нютон, му отредиха заслужено място на един от изтъкнатите експерти в актуални направления на математическия анализ, в които бяха насочени творческите му усилия в продължение на няколко десетилетия от миналия век.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Über die Nullstellen einiger Klassen von Polynomen. *Tohoku Math. J.*, **45** (1939), Part 2, 259–264.
- [2] Върху разпределението на нулите на една класа цели функции. *Годишник СУ, Природо-матем. Фак., Мат.-Физ.*, **44**, 1947–1948, Кн. 1, 143–174.
- [3] Über trigonometrische Integrale welche ganze Funktionen mit nur reellen Nullstellen darstellen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), No 1–2, 191–194.
- [4] Аналитично непродължими степенни редове. *Годишник СУ, Физ.-Мат. Фак., Мат.-Физ.*, **42**, 1945–1946, Кн. 1, 67–81.
- [5] За особените точки в околността на абсцисата на сходимост на една класа Дирихлетови редове. *Годишник СУ, Физ.-Мат. Фак., Мат.-Физ.*, **43**, 1946–1947, Кн. 1, 239–267.
- [6] Към теорията на еднолистните функции. *Годишник СУ, Природо-матем. Фак., Мат.-Физ.*, **45**, 1948–1949, Кн. 1, 115–135.
- [7] О конечных суммах однолистных функций. *Докл. Акад. Наук*, **70** (1950), № 1, 9–11.
- [8] Теорема за 3-симетричните еднолистни функции. *Годишник СУ, Природо-матем. Фак., Мат.-Физ.*, **46**, 1949–1950, Кн. 1, 161–165.
- [9] Über die Abschnitte der 3-symmetrischen schlichten Funktionen. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **3**, 1950, No 1, 9–12.
- [10] Теоремы о трижды симметричных однолистных функциях. *Докл. Акад. Наук*, **84**, 1952, № 1, 9–12.

- [11] Über die Abschnitte der schlichten Funktionen. *Aita Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), Nos 1–2, 109–111.
- [12] Върху парциалните суми на еднолистните функции, които изобразяват единичния кръг конвексно. *Годишник СУ, Природо-Матем. Фак., Мат.–Физ.*, **46**, 1949–1950, Кн. 1, 153–159.
- [13] О разделенной разности для ограниченных однолистных функций. *Докл. Акад. Наук*, **100** (1955), 861–862.

Институт по математика и информатика
 Българска академия на науките
 ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
 1113 София
 e-mail: pkrusev@math.bas.bg