

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
*Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013*

ДИФЕРЕНЦИРАНИЯ В ПОЛИНОМНИ АЛГЕБРИ*

Веселин Дренски

*Посвещава се на светлата памет на нашите колеги
акад. Стефан Додунев и проф. Кероне Чакърян,
които ни напуснаха през 2012 г.*

Това е обзор за връзката на теорията на диференциранията в полиномните алгебри на няколко променливи с две направления на комутативната алгебра: 14-тия проблем на Хилберт и класическата теория на инвариантите.

Въведение. Нека K е поле. Във връзка с приложенията, по-нататък ще предположим, че K е с характеристика 0. Линейното пространство R над K се нарича (не обязательно асоциативна или комутативна) *алгебра* над K , ако в него е дефинирано умножение $*$: $R \times R \rightarrow R$, което удовлетворява условията

$$\alpha(u * v) = (\alpha u) * v = u * (\alpha v), \quad \alpha \in K, u, v \in R,$$

$$u * (v + w) = u * v + u * w, \quad (v + w) * u = v * u + w * u, \quad u, v, w \in R.$$

Линейният оператор δ , действащ в алгебрата R , се нарича *диференциране* на R , ако удовлетворява *правилото на Лайбниц*

$$\delta(u * v) = \delta(u) * v + u * \delta(v), \quad u, v \in R.$$

Очевидно понятието диференциране на алгебра е обобщение на обичайното диференциране в множеството (което е и алгебра) на диференцируемите функции на реална променлива, което удовлетворява условията

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Единствените диференцируеми функции на една променлива, чиято производна е равна на нула, са константите. По аналогия, ако δ е диференциране на алгебрата R , то елементите на неговото ядро

$$\text{Ker}(\delta) = R^\delta = \{u \in R \mid \delta(u) = 0\}$$

*2010 Mathematics Subject Classification: 13N15, 13A50.

Ключови думи: полиномни алгебри, диференцирания, 14-ти проблем на Хилберт, класическа теория на инвариантите.

Изследването е частично финансирано от Фонд “Научни изследвания” чрез Научно-изследователски проект ДНТС/Украйна 01/0007 за двустранно научно-техническо сътрудничество между България и Украйна.

се наричат *константи* на δ . Лесно се проверява, че $\text{Ker}(\delta)$ е подалгебра на R .

По-нататък ще разглеждаме полиномната алгебра на d променливи $K[X_d] = K[x_1, \dots, x_d]$ с коефициенти от полето K . Добре известно е, че всяко изображение $\delta : X_d \rightarrow K[X_d]$ се продължава еднозначно до диференциране на $K[X_d]$, което ние ще означаваме със същия символ δ . Ако

$$\delta(x_j) = f_j(X_d) = f_j(x_1, \dots, x_d), \quad j = 1, \dots, d,$$

то δ може да се запише като

$$\delta = \sum_{j=1}^d f_j(X_d) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

където $\frac{\partial}{\partial x_j}$ са обичайните частни производни.

В тази статия ще покажем връзката на теорията на диференциранията на полиномната алгебра $K[X_d]$ с две направления на комутативната алгебра: 14-тия проблем на Хилберт и класическата теория на инвариантите.

1. Четирнадесети проблем на Хилберт. На Световния конгрес на математиците в Париж през 1900 г. Хилберт изнася доклад, в който формулира редица от проблеми, които оказват решаващо влияние върху цялата математика на XX век. (В публикувания текст на доклада [24] са включени 23 проблема, от които 10 са представени на самия доклад.) Четирнадесетият проблем е мотивиран от теорията на инвариантите. Корените на тази теория могат да се проследят в изследванията на Лагранж (1773–1775) и Гаус (в неговите *Disquisitiones Arithmeticae* от 1801 г.), които се интересуват от представянето на числата чрез бинарни квадратични форми и използват дискриминантата за различаване на нееквивалентните форми. Но истинската теория на инвариантите се заражда през първата половина на XIX век в работите на Джордж Бул в Англия и Ото Хесе в Германия, и се развива по-нататък от плеяда известни математици, сред които Кели, Силвестър, Клебш, Гордан и Хилберт, виж например [10].

Нека G е подгрупа на групата $GL(KX_d)$ от обратимите линейни оператори на линейното пространство KX_d с базис $X_d = \{x_1, \dots, x_d\}$. Ако фиксираме базиса X_d на KX_d , можем да отъждествим $GL(KX_d)$ с групата $GL_d(K)$ от обратимите матрици от ред d с елементи от полето K . Полиномът $f(X_d) \in K[X_d]$ се нарича *инвариант* на групата G , ако

$$g(f(X_d)) = f(g(x_1), \dots, g(x_d)) = f(X_d) \text{ за всички } g \in G.$$

Множеството $K[X_d]^G$ от инвариантите на групата G е подалгебра на $K[X_d]$.

Например симетричните полиноми на d променливи са инварианти на симетричната група S_d , действаща върху KX_d чрез пермутиране на базисните елементи $x_1, \dots, x_d$.

Мотивацията на Хилберт да постави своя 14-ти проблем идва от следния проблем.

Проблем 1. Ако G е произволна подгрупа на $GL_d(K)$, вярно ли е, че алгебрата на инвариантите $K[X_d]^G$ е крайно породена? С други думи, съществуват ли краен брой G -инварианти $f_1(X_d), \dots, f_m(X_d)$ такива, че всеки G -инвариант се изразява чрез тях с помощта на операциите събиране, умножение на полиноми и умножение с константи от полето K ?

Това е един от основните проблеми на теорията на инвариантите през XIX век,

който за конкретни класове от групи не е загубил своето значение и днес.

Подгрупата G на $GL_d(K)$ действа и върху полето $K(X_d)$ от рационални функции на d променливи. Множеството $K(X_d)^G$ от G -инвариантни рационални функции е подполе на $K(X_d)$ и $K[X_d]^G = K[X_d] \cap K(X_d)$. Проблемът на Хилберт е следният:

Проблем 2 (14-ти проблем на Хилберт). *Нека F е подполе на $K(X_d)$, което съдържа полето K . Вярно ли е, че алгебрата $F \cap K[X_d]$ е крайно породена?*

Проблем 1 има положително решение за редица класове от групи, виж монографията на Дерксен и Кемпер [13] за детайли. Гордан доказва през 1868 г., че алгебрата на инвариантите на подгрупа G на $GL_d(K)$, изоморфна на групата $SL_2(K)$ на матриците от втори ред с детерминанта единица, е крайно породена. През 1890 г. Хилберт обобщава този резултат за подгрупи, изоморфни на класическите групи $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, ортогоналната група $O_n(K)$ и симплектичната група $Sp_n(K)$. В действителност, методите на Хилберт работят за всички т.н. редуцируеми групи. През 1916 г. Еми Ньотер доказва крайната породеност на алгебрите на инвариантите на крайните групи.

На 14-тия проблем на Хилберт е посветено голямо количество литература, виж например книгите на Новицки [35], Ван ден Есен [19] и Фройденбург [21] и обзора на Фройденбург [20]. Теоремата на Зариски [40] от 1954 г. твърди, че проблемът на Хилберт има положително решение за полиномите на две променливи. Оказва се, че отговорът в общия случай е отрицателен и той е даден през 1958 г. от японския математик Нагата [33, 34]. Единият от контрапримерите на Нагата, представен на Международния конгрес на математиците през 1958 г., дава отрицателен отговор и на проблем 1. Нагата *намира действие на групата $G = (K, +)^{13}$, която е директна сума на 13 копия на адитивната група $(K, +)$ на полето K върху алгебрата $K[X_{32}]$ на полиномите на 32 променливи, при което алгебрата $K[X_{32}]^G$ на инвариантите на G не е крайно породена.*

Този контрапример има директна връзка с диференциранията на полиномната алгебра. Диференцирането δ на една алгебра R се нарича *локално нилпотентно*, ако за всеки елемент $u \in R$ съществува естествено число $n = n(u)$ такова, че $\delta^n(u) = 0$. Тогава експонентата на δ

$$\exp(\delta) = 1 + \frac{\delta}{1!} + \frac{\delta^2}{2!} + \dots$$

задава изображение $\exp(\delta) : R \rightarrow R$, което е добре дефинирано, защото $\delta^n(u) = 0$ за произволно $u \in R$ и достатъчно голямо $n > 0$, т.е. безкрайният ред се превръща в крайна сума. Оказва се, че $\exp(\delta)$ е *автоморфизъм* на R (т.е. изоморфизъм $R \rightarrow R$). Известно е, че ако $\varphi : (K, +) \rightarrow \text{Aut}(K[X_d])$ е *хомоморфизъм* на адитивната група $(K, +)$ в групата от автоморфизми на алгебрата $K[X_d]$, то съществува *локално нилпотентно диференциране* δ на $K[X_d]$ такова, че $\phi(\alpha) = \exp(\alpha\delta)$, $\alpha \in K$. Алгебрата $K[X_d]^{(K,+)}$ на инвариантите на $(K, +)$ съвпада с алгебрата $K[X_d]^\delta$ на константите на δ . Когато хомоморфизмът φ изобразява $\alpha \in (K, +)$ в $g_\alpha \in GL_d(K)$, т.е. имаме линейно действие на $(K, +)$, то $(g_1 - 1)^d = 0$ и

$$\delta = \log \varphi(1) = \log(g_1) = \frac{g_1 - 1}{1} - \frac{(g_1 - 1)^2}{2} + \dots + (-1)^d \frac{(g_1 - 1)^{d-1}}{d-1}$$

действа като нилпотентен линейен оператор в d -мерното линейно пространство KX_d . Такива *линейни локално нилпотентни диференцирания* се наричат *диференцирания*

на Вайценбюк. Следователно, резултатът на Нагата може да се формулира така.

Теорема 3. *Съществуват 13 диференцирания на Вайценбюк $\delta_1, \dots, \delta_{13}$ на алгебрата $K[X_{32}]$ на полиномите на 32 променливи такива, че сечението на алгебрите*

от константи $\bigcap_{i=1}^{13} K[X_{32}]^{\delta_i}$ не е крайно породена алгебра.

Има много опити за подобряване на този резултат в две посоки – намаляване на броя на променливите и на броя на диференциранията. Към момента рекордите се държат от Фройденбург [22] (виж също неотдавнашния препринт [23]) и Мукаи [32].

Теорема 4. (1) (Фройденбург [22]) *Съществува подгрупа G на групата от горнотриъгълни матрици от единадесети ред с единици на диагонала такава, че алгебрата на инвариантите $K[X_{11}]^G$ не е крайно породена.*

(2) (Мукаи [32]) *Съществуват 3 диференцирания на Вайценбюк $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ на алгебрата $K[X_{18}]$ такива, че сечението на алгебрите от константи $K[X_{18}]^{\delta_1} \cap K[X_{18}]^{\delta_2} \cap K[X_{18}]^{\delta_3}$ не е крайно породено.*

Класическата теорема на Вайценбюк [38] от 1932 г. гласи, че алгебрата $K[X_d]^\delta$ на константите на произволно диференциране на Вайценбюк δ е крайно породена. Заедно с резултите на Фройденбург и Мукаи това поставя следните проблеми (виж [22]):

Проблем 5. (1) *Кое е най-малкото d , за което съществува подгрупа G на $GL_d(K)$ такава, че алгебрата $K[X_d]^G$ не е крайно породена?*

(2) *Съществуват ли две диференцирания на Вайценбюк δ_1, δ_2 на алгебрата $K[X_d]$ такива, че сечението на алгебрите от константи $K[X_d]^{\delta_1} \cap K[X_d]^{\delta_2}$ не е крайно породена алгебра?*

През 1990 г. Робъртс [37] построява контрапример към 14-тия проблем на Хилберт, който почива на друг принцип. Както Анете А'Кампо-Нойен [1] и Денви и Финстън [14] показват малко по-късно, контрапримерът на Робъртс представлява алгебрата на константите $K[X_7]^\delta$ на нелинейно локално нилпотентно диференциране δ на $K[X_7]$, която не е крайно породена. Впоследствие идеята на Робъртс е доразвита в няколко статии. Най-малката размерност, за която са известни контрапримери от този тип е 5.

Теорема 6 (Дегъл и Фройденбург [11]). *Алгебрата на константите $K[X_5]^\delta$ на локално нилпотентното диференциране*

$$\delta = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_1 x_3 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_4} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_5}$$

не е крайно породена.

Като следствие от теоремата на Зариски [40] се получава, че ако δ е локално нилпотентно диференциране на алгебрата $K[X_3]$ на полиномите на три променливи, то алгебрата $K[X_3]^\delta$ е крайно породена. Това поставя следния въпрос (виж [22]):

Проблем 7. *Има ли безкрайно породена алгебра на константите $K[X_4]^\delta$ на локално нилпотентно диференциране δ на алгебрата $K[X_4]$ на полиномите на четири променливи?*

Ще приключим този параграф със следния резултат на Курода [29].

Теорема 8. *Нека β_{ij} , $i, j = 1, 2$, и γ са естествени числа, за които*

$$\frac{\beta_{11}}{\beta_{11} + \beta_{21}} + \frac{\beta_{22}}{\beta_{22} + \beta_{12}} < \frac{1}{2}.$$

Нека $K(f_1, f_2, f_3)$ е подполето на $K(X_3)$, породено от рационалните функции

$$f_1 = x_1^{\beta_{21}} x_2^{-\beta_{22}} - x_1^{\beta_{11}} x_2^{-\beta_{12}},$$

$$f_2 = x_3^\gamma - x_1^{-\beta_{11}} x_2^{\beta_{12}},$$

$$f_3 = 2x_1^{\beta_{21}-\beta_{11}} x_2^{\beta_{12}-\beta_{22}} - x_1^{-2\beta_{11}} x_2^{2\beta_{12}}.$$

Тогава алгебрата $K(f_1, f_2, f_3) \cap K[X_3]$ не е крайно породена.

Тъй като $K(f_1, f_2, f_3) \cap K[X_d] = K(f_1, f_2, f_3) \cap K[X_3]$ за $d \geq 3$, това дава контра-пример към 14-тия проблем на Хилберт за всяко $d \geq 3$. (Както вече споменахме, проблемът на Хилберт се решава положително от теоремата на Зариски при $d = 2$.)

2. Класическа теория на инвариантите. Една от основните задачи на класическата теория на инвариантите е описанието на инвариантите на специалната линейна група $SL_m(K)$. В този параграф ще дискутираме връзката с теорията на диференциранията на Вайценбюк. Тази връзка се проявява най-добре в случая на групата $SL_2(K)$. Вайценбюк доказва своята теорема [38] в желанието си да реши положително проблем 1. Както вече споменахме, алгебрата на константите на едно (линейно локално нилпотентно) диференциране на Вайценбюк съвпада с алгебрата на инвариантите на адитивната група на основното поле. Въпреки това, много често теорията на диференциранията на Вайценбюк се е развивала паралелно, а много резултати са получени без използването на класическата теория на инвариантите. Работата с диференцирането на Вайценбюк вместо със съответната линейна група линеаризира проблема за изучение на алгебрите на инвариантите и я прави по-лека, включително от изчислителна гледна точка. Тази идея стана особено популярна с развитието на изчислителната техника и разработката на нови методи за пресмятания с абстрактни алгебраични обекти.

Диференцирането на Вайценбюк δ действа като линеен оператор върху линейното пространство KX_d . С точност до смяна на базиса δ се определя от своята жорданова матрица

$$J(\delta) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix},$$

която се състои от жорданови клетки с нулев диагонал

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следователно, за всяка размерност d има само краен брой съществено различни диференцирания на Вайценбюк. Ако

$$g_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in K,$$

то изображението $d_\alpha \rightarrow \exp(\alpha J(\delta))$, $\alpha \in K$, задава хомоморфизъм на групата

$UT_2(K)$ на горнотриъгълните матрици от втори ред в $GL_d(K)$ и действие на $UT_2(K)$ върху KX_d . Тъй като алгебрата $K[X_d]^\delta$ на константите на δ съвпада с алгебрата $K[X_d]^{UT_2(K)}$ на инвариантите на $UT_2(K)$, изучаването на константите на δ е еквивалентно на изучаването на инвариантите на $UT_2(K)$. Например, добре известно е, че алгебрата $K[X_d]^{UT_2(K)}$ съвпада с алгебрата на ковариантите на групата $SL_2(K)$, действаща върху няколко бинарни форми. Резултати от класическата теория на инвариантите, получени през втората половина на XIX век, гласят, че алгебрата на ковариантите на $SL_2(K)$ е крайно породена, което веднага доказва теоремата на Вайценбюк за крайната породеност на $K[X_d]^\delta$. От друга страна, Ван ден Есен [18] предлага елегантен алгоритъм за намиране на пораждащите на алгебрата на константите $K[X_d]^\delta$. Алгоритъмът използва бази си на Грьобнер, за пресмятането на които има стандартни пакети от програми. Той работи и за произволно (нелинейно) локално nilпотентно диференциране, за което алгебрата на константите е крайно породена. Това позволява да се намерят пораждащи и за алгебрата на инвариантите на групата $UT_2(K)$. Неотдавна Бедратюк [5] предложи друг алгоритъм за намиране на пораждащите на алгебрата $K[X_d]^\delta$, в духа на мощния *символичен метод* в класическата теория на инвариантите.

Пораждащите на алгебрата $K[X_d]^{SL_2(K)}$ на инвариантите на групата $SL_2(K)$ също могат лесно да се изразят чрез пораждащите на $K[X_d]^\delta$. Ще илюстрираме това когато $SL_2(K)$ действа върху бинарните форми (т.е. хомогенните полиноми на две променливи) от степен d . Нека KY_2 е двумерно линейно пространство с базис $Y_2 = \{y_1, y_2\}$. Да отъждествим линейното пространство KZ_{d+1} с базис $Z_{d+1} = \{z_0, z_1, \dots, z_d\}$ с линейното пространство на бинарните форми от степен d като отъждествим z_i с едночлена $y_1^{d-i}y_2^i$, $i = 0, 1, \dots, d$. Дефинираме действие на $SL_2(K)$ върху $K[Y_2]$ и KZ_{d+1} по следното правило: ако

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(K),$$

то

$$g(y_1) = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2, \quad g(y_2) = \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2,$$

$$g(y_1^{d-i}y_2^i) = g(y_1)^{d-i}g(y_2)^i = \sum_{j=0}^d \beta_j y_1^{d-j}y_2^j, \quad i = 0, 1, \dots, d,$$

и

$$g(z_i) = \sum_{j=0}^d \beta_j z_j, \quad i = 0, 1, \dots, d.$$

Дефинираме две диференцирания δ_1 и δ_2 на полиномната алгебра $K[Y_2]$ чрез

$$\delta_1(y_1) = 0, \delta_1(y_2) = y_1, \quad \delta_2(y_1) = y_2, \delta_2(y_2) = 0.$$

Тъй като

$$\delta_1(y_1^{d-i}y_2^i) = iy_1^{d-i+1}y_2^{i-1}, \quad \delta_2(y_1^{d-i}y_2^i) = (d-i)y_1^{d-i-1}y_2^{i+1},$$

пренасяме действието на δ_1 и δ_2 върху алгебрата $K[Z_{d+1}]$ на полиномите на $d+1$ променливи:

$$\delta_1(z_i) = iz_{i-1}, \quad \delta_2(z_i) = (d-i)z_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, d.$$

Очевидно δ_1 и δ_2 са диференцирания на Вайценбюк на алгебрата $K[Z_{d+1}]$, които са *базисни*, т.е. жордановите им матрици се състоят от един блок от ред $d+1$. Общата теория дава, че *полиномът* $f(Z_{d+1})$ е $SL_2(K)$ -инвариант *тогава и само тогава*, когато $\delta_1(f(Z_{d+1})) = \delta_2(f(Z_{d+1})) = 0$. За да намерим пораздащите на алгебрата $K[Z_{d+1}]^{SL_2(K)}$ на инвариантите на $SL_2(K)$ даже няма нужда да търсим пораздащите на алгебрата $K[Z_{d+1}]^{\delta_2}$ на константите на δ_2 . Алгебрата $K[Z_{d+1}]$ има две градуировки. Полиномът $f(Z_{d+1}) \in K[Z_{d+1}]$ е хомогенен от степен n относно обичайната градуировка, ако е от вида

$$f(Z_{d+1}) = \sum \gamma_j z_{j_1} \cdots z_{j_n}, \quad \gamma_j \in K,$$

т.е. всички мономи в записа на $f(Z_{d+1})$ са с дължина n . Той е *биомогенен* от степен (p, q) , ако е от вида

$$f(Z_{d+1}) = \sum \gamma_j z_{j_1} \cdots z_{j_m}, \quad \gamma_j \in K,$$

където всички мономи удовлетворяват условието

$$p = md - (j_1 + \cdots + j_m), \quad q = j_1 + \cdots + j_m,$$

т.е. предполагаме, че променливата z_j е от бистепен $(d-j, j)$. Алгоритмите от [18, 5] за намиране на пораздащите на алгебрата $K[Z_{d+1}]^{\delta_1}$ дават системи от пораздащи $\{f_i(Z_{d+1}) \mid i = 1, \dots, r\}$, които са хомогенни относно и двете градуировки. Ако *полиномът* $f_i(Z_{d+1})$ е *биомогенен* от степен (p_i, q_i) , то $p_i \geq q_i$ и алгебрата $K[Z_{d+1}]^{SL_2(K)}$ се поразда от тези $f_i(Z_{d+1})$, за които $p_i = q_i$.

Пример 1. Нека групата $SL_2(K)$ действа на бинарните квадратични форми. В горните означения

$$\delta_1(y_1) = 0, \quad \delta(y_2) = y_1,$$

$$\delta_1(y_1^2) = 0, \quad \delta_1(y_1 y_2) = y_1^2, \quad \delta_1(y_2^2) = 2y_1 y_2,$$

и δ_1 действа върху Z_3 по правилото

$$\delta_1(z_0) = 0, \quad \delta_1(z_1) = z_0, \quad \delta_1(z_2) = 2z_1.$$

Добре известно е, че алгебрата $K[Z_3]^{\delta_1}$ се поразда от z_0 и $f(Z_3) = z_0 z_2 - z_1^2$, които са хомогенни съответно от бистепени $(2, 0)$ и $(2, 2)$. Следователно, алгебрата $K[Z_3]^{SL_2(K)}$ се поразда от $f(Z_3)$, което също е добре известно.

През 1994 г. Новицки [35] изказва хипотезата, че *когато всички жорданови клетки на диференцирането на Вайценбюк δ на полиномната алгебра $K[X_{2d}]$ са от втори ред и*

$$\delta(x_{2j-1}) = 0, \delta(x_{2j}) = x_{2j-1}, \quad j = 1, \dots, d,$$

то алгебрата $K[X_{2d}]^\delta$ е породена от

$$x_{2j-1}, \quad j = 1, \dots, d,$$

$$\begin{vmatrix} x_{2k-1} & x_{2k} \\ x_{2l-1} & x_{2l} \end{vmatrix} = x_{2k-1} x_{2l} - x_{2k} x_{2l-1}, \quad 1 \leq k < l \leq d.$$

През последните години се появиха няколко доказателства на тази хипотеза, които са базирани на различни идеи. Непубликуваното доказателство на Дерксен и доказателството на Бедратюк [3] показват, че резултатът следва от добре известни резултати от класическата теория на инвариантите. Доказателството на Хури [25, 26] използва базиси на Грьобнер. Доказателството на Дренски и Макара-Лиманов [16]

се базира на елементарни идеи, а подходът на Курода [30] използва идеи на Курано [28], свързани с контрапримера на Робъртс към 14-тия проблем на Хилберт [37]. В частност, [16] дава базис на Грьобнер на идеала от определящите съотношения между пораждащите на алгебрата $K[X_{2d}]^\delta$ и базис на $K[X_{2d}]^\delta$ като линейно пространство. Превеждайки резултатите от теория на инвариантите на $SL_2(K)$ на езика на диференциранията на Вайценбюк, Бедратюк [3] намира и система пораждащи за алгебрата на константите $K[X_{3d}]^\delta$, когато всички жорданови клетки на δ са от трети ред.

Теорема 9. *Нека δ е диференциране на Вайценбюк на $K[X_{3d}]$, където*

$$\delta(x_{3j-2}) = 0, \delta(x_{3j-1}) = x_{3j-2}, \delta(x_{3j}) = x_{3j-1}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Тогава алгебрата $K[X_{3d}]^\delta$ на константите на δ се поражда от полиномите

$$x_{3j-2}, \quad j = 1, \dots, d,$$

$$\begin{vmatrix} x_{3k-2} & x_{3k-1} \\ x_{3l-2} & x_{3l-1} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k < l \leq d,$$

$$x_{3k-2}x_{3l} - x_{3k-1}x_{3l-1} + x_{3k}x_{3l-2}, \quad 1 \leq k < l \leq d,$$

$$\begin{vmatrix} x_{3p-2} & x_{3p-1} & x_{3p} \\ x_{3q-2} & x_{3q-1} & x_{3q} \\ x_{3r-2} & x_{3r-1} & x_{3r} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq p < q < r \leq d.$$

Нека V е градуирано линейно пространство, т.е. V е директна сума на своите подпространства $V_0, V_1, V_2, \dots$, и нека всички V_n са крайномерни. Формалният степенен ред

$$H(V, z) = \sum_{n \geq 0} \dim(V_n) z^n$$

се нарича *ред на Хилберт* (или *ред на Поанкаре*). Например редът на Хилберт на алгебрата $K[X_d]$ на полиномите на d променливи с нейната естествена градуировка е

$$H(K[X_d], z) = \sum_{n \geq 0} \binom{n+d-1}{d-1} z^n = \frac{1}{(1-z)^d}.$$

Алгебрата $K[X_d]^G$ на инвариантите на произволна група G е градуирано подпространство на $K[X_d]$ и n -тият коефициент на нейния ред на Хилберт $H(K[X_d]^G, z)$ е равен на размерността на пространството на G -инвариантните хомогенни полиноми от степен n .

Една от основните задачи от зората на теорията на инвариантите е пресмятането на реда на Хилберт на алгебрата на $SL_2(K)$ -инвариантите, когато $SL_2(K)$ действа върху бинарните форми от дадена степен, виж например коментарите в [27] и [36] или в [7]. В общия случай редът на Хилберт на алгебрата $K[X_d]^G$ на инвариантите на крайната група G се дава с класическата *формула на Молин* от 1897 г.

$$H(K[X_d]^G, z) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - gz)},$$

където $1 - gz$ се разглежда като матрица от ред d . В случая на безкрайна (редуктивна комплексна) група G се използва *формулата на Молин-Вайл*, която е интегрален

аналог на формулата на Молин.

Пример 2. Нека KX_{d+1} е линейното пространство на бинарните форми от степен d . Тогава, виж например [13], редът на Хилберт на алгебрата $K[X_{d+1}]^{SL_2(K)}$ на $SL_2(K)$ -инвариантите е

$$H(K[X_{d+1}]^{SL_2(K)}, z) = 2 \int_0^1 \sin^2(2\pi t) \prod_{j=0}^d \frac{1}{1 - e^{2\pi i(d-2j)t} z} dt.$$

Аналогично, редът на Хилберт на алгебрата на инвариантите на групата $UT_2(K)$ (която съвпада с алгебрата на константите на базисното диференциране на Вайценбък на алгебрата $K[X_{d+1}]$) е

$$H(K[X_{d+1}]^{UT_2(K)}, z) = 2 \int_0^1 \cos^2(\pi t) \prod_{j=0}^d \frac{1}{1 - e^{2\pi i(d-2j)t} z} dt.$$

Тези интеграли могат да се сметнат например с теоремата за резидиумите, виж коментарите в [13]. Въпреки, че това не е очевидно от интегралното представяне, редовете $H(K[X_{d+1}]^{SL_2(K)}, z)$ и $H(K[X_{d+1}]^{UT_2(K)}, z)$ са рационални функции. Това следва веднага от теоремата на Хилберт-Сер, че редът на Хилберт на една градуирана крайно породена комутативна алгебра е рационална функция. Подобни интегрални формули съществуват за алгебрите на инвариантите за произволни линейни действия на $SL_2(K)$ и $UT_2(K)$. Виж също статията на Бедратюк [4] за пресмятането в класически дух на редовете на Хилберт на произволно диференциране на Вайценбък.

Дренски и Генов [15] предложиха друг метод за пресмятане на редовете на Хилберт на алгебрата на инвариантите на $SL_2(K)$ и $UT_2(K)$ (и следователно и на алгебрата на константите на диференциранията на Вайценбък), който комбинира методи от теорията на симетричните функции и представянията на $GL_2(K)$, и е мотивиран от изследванията на Алмквист, Дикс и Форманек [2] и Де Кончини, Айзенбъд и Прочези [12]. Впоследствие подходът беше доразвит от Франческа Бенанти, Силвия Бумова, Дренски, Генов и Коев [7] на базата на идеи на Берел [8, 9], комбинирани с класическия метод на Елиът [17] за решаване на системи от хомогенни линейни диофантови уравнения и неравенства и неговото усъвършенстване от т.н. Ω -смятане на МакМахон [31]. Ще илюстрираме метода от [7] за алгебрата на инвариантите на $SL_2(K)$ и $UT_2(K)$, действащи върху бинарните форми от степен d (и следователно за алгебрата на константите на базисно диференциране на Вайценбък).

Пример 3. Нека KX_{d+1} е линейното пространство на бинарните форми от степен d . Редът на Хилберт, който отчита и двете градуировки на алгебрата $K[X_{d+1}]$, е

$$H(K[X_{d+1}], t_1, t_2, z) = \prod_{j=0}^d \frac{1}{1 - t_1^j t_2^{d-j} z} = \sum_{n_1, n_2, n \geq 0} h(n_1, n_2, n) t_1^{n_1} t_2^{n_2} z^n.$$

Това е същото произведение, което се появява в интегралите в пример 2. Коефициентът $h(n_1, n_2, n)$ е равен на размерността на пространството на хомогенните полиноми от степен n (степената на z) и бистепен (n_1, n_2) (степените на t_1 и t_2). Въвеждаме нова променлива ξ , след което заместваме t_1 с $t_1 \xi$ и t_2 с t_2 / ξ във функцията

$$f(t_1, t_2, z) = (t_1 - t_2) H(K[X_{d+1}], t_1, t_2, z).$$

Получаваме лорановия ред

$$f(t_1\xi, \frac{t_2}{\xi}, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(t_1, t_2, z)\xi^k,$$

където $f_k(t_1, t_2, z)$ са „обикновени“ формални степенни редове на t_1, t_2, z . Методът на [7] дава, че

$$H(K[X_{d+1}]^{UT_2(K)}, t_1, t_2, z) = \frac{1}{t_1} \sum_{k \geq 0} f_k(t_1, t_2, z) = \sum_{n_1, n_2, n \geq 0} p(n_1, n_2, n) t_1^{n_1} t_2^{n_2} z^n$$

е редът на Хилберт на $K[X_{d+1}]^{UT_2(K)}$, който отчита и двете градуировки. Следователно, обикновеният ред на Хилберт (относно обичайната градуировка) е

$$H(K[X_{d+1}]^{UT_2(K)}, z) = H(K[X_{d+1}]^{UT_2(K)}, 1, 1, z).$$

Аналогично, редът на Хилберт на $K[X_{d+1}]^{SL_2(K)}$ се получава от “диагонала”

$$\sum_{n, n_1 \geq 0} p(n_1, n_1, n) (t_1 t_2)^{n_1} z^n$$

на реда $H(K[X_{d+1}]^{UT_2(K)}, t_1, t_2, z)$ след полагането $t_1 = t_2 = 1$. Ще отбележим, че лорановият ред $f(t_1\xi, t_2/\xi, z)$ е рационална функция на t_1, t_2, z, ξ , чийто знаменател е произведение на биноми от вида $1 - A\xi^k$, където A е моном на t_1, t_2, z . Отделянето на частта $\sum_{k \geq 0} f_k(t_1, t_2, z)\xi^k$ от целия лоранов ред $f(t_1\xi, t_2/\xi, z)$ става с метода на Елиът

[17] и Ω -смятането на МакМахон [31]. Пресмятанията се упростиават след използване на подобренията, направени от Ксин [39]. Виж също статията на Бедратюк и Ксин [6], която използва идеите на [17, 31, 39], но приложени към интегралната формула на Молин-Вайл.

REFERENCES

- [1] A. A'CAMPO-NEUEN. Note on a counterexample to Hilbert's fourteenth problem given by P. Roberts. *Indag. Math., New Ser.*, **5** (1994), 253–257.
- [2] G. ALMKVIST, W. DICKS, E. FORMANEK. Hilbert series of fixed free algebras and noncommutative classical invariant theory. *J. Algebra*, **93** (1985), 189–214.
- [3] L. BEDRATYUK. A note about the Nowicki conjecture on Weitzenböck derivations. *Serdica Math. J.*, **35** (2009), 311–316.
- [4] L. BEDRATYUK. Weitzenböck derivations and classical invariant theory: I. Poincaré series, *Serdica Math. J.* **36** (2010), 99–120.
- [5] L. BEDRATYUK. Weitzenböck derivations and classical invariant theory: II: The symbolic method, *Serdica Math. J.* **37** (2011), 87–106.
- [6] L. BEDRATYUK, G. XIN. MacMahon partition analysis and the Poincaré series of the algebras of invariants of ternary and quaternary forms. *Linear Multilinear Algebra*, **59** (2011), 789–799.
- [7] F. BENANTI, S. BOUMOVA, V. DRENSKY, G. K. GENOV, P. KOEV. Computing with rational symmetric functions and applications to invariant theory and PI-algebras. *Serdica Math. J.*, **38** (2012), 137–188,
<http://www.math.bas.bg/serdica/2012/2012-137-188.pdf>.

- [8] A. BERELE. Applications of Belov's theorem to the cocharacter sequence of p.i. algebras. *J. Algebra*, **298** (2006), 208–214.
- [9] A. BERELE. Properties of hook Schur functions with applications to p. i. algebras. *Adv. Appl. Math.*, **41** (2008), 52–75.
- [10] L. CORRY. Theory of invariants (Italian), in Sandro Petruccioli (ed.) *Storia della scienza*, Roma. Istituto della Enciclopedia Italiana (2003), Vol. **VII**, 1025–1029; English translation: <http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/invariants.html>.
- [11] D. DAIGLE, G. FREUDENBURG. A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5. *J. Algebra*, **221** (1999), 528–535.
- [12] C. DE CONCINI, D. EISENBUD, C. PROCESI. Young diagrams and determinantal varieties. *Invent. Math.*, **56** (1980), 129–165.
- [13] H. DERKSEN, G. KEMPER. Computational Invariant Theory, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. **130**, Berlin, Springer-Verlag, 2002.
- [14] J. K. DEVENNEY, D. R. FINSTON. G_a actions on C^3 and C^7 . *Commun. Algebra*, **22** (1994), 6295–6302.
- [15] V. DRENSKY, G. K. GENOV. Multiplicities of Schur functions with applications to invariant theory and PI-algebras/ *C.R. Acad. Bulg. Sci.* **57** (2004), No 3, 5–10.
- [16] V. DRENSKY, L. MAKAR-LIMANOV. The conjecture of Nowicki on Weitzenböck derivations of polynomial algebras. *J. Algebra Appl.* **8** (2009), 41–51.
- [17] E. B. ELLIOTT. On linear homogeneous diophantine equations. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **34** (1903), 348–377.
- [18] A. VAN DEN ESSEN. An algorithm to compute the invariant ring of a G_a -action on an affine variety. *J. Symb. Comput.*, **16** (1993), 551–555.
- [19] A. VAN DEN ESSEN. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, Progress in Math. (Boston, Mass.), vol. **190**, Basel, Birkhäuser, 2000.
- [20] G. FREUDENBURG. A survey of counterexamples to Hilbert's fourteenth problem. *Serdica Math. J.*, **27** (2001), 171–192.
<http://www.math.bas.bg/serdica/2001/2001-171-192.pdf>.
- [21] G. FREUDENBURG. Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations/ Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. **136**, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VII. Berlin, Springer-Verlag, 2006.
- [22] G. FREUDENBURG. A linear counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension eleven/ *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 51–57.
- [23] G. FREUDENBURG. Foundations of invariant theory for the down operator, preprint, <http://www.science.unitn.it/cirm/Freudenburger.pdf>.
- [24] D. HILBERT. Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900, *Göttinger Nachrichten*, (1900), 253–297. *Archiv der Mathematik und Physik* **1** (1901), 44–63, 213–237; English translation: Mathematical Problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437–479. Reprinted: *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37** (2000), 407–436.
- [25] J. KHOURY. Locally Nilpotent Derivations and Their Rings of Constants. Ph.D. Thesis, Univ. Ottawa, 2004.
- [26] J. KHOURY. A Groebner basis approach to solve a conjecture of Nowicki. *J. Symbolic Comput.*, **43** (2008), 908–922.
- [27] H. KRAFT, C. PROCESI. Classical Invariant Theory, A Primer, preprint, <http://jones.math.unibas.ch/~kraft/Papers/KP-Primer.pdf>.
- [28] K. KURANO. Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebras and Roberts' counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert. *Tokyo J. Math.*, **16** (1993), 473–496.
- [29] S. KURODA. A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three. *Mich. Math. J.*, **53** (2005), 123–132.

- [30] S. KURODA. A simple proof of Nowicki's conjecture on the kernel of an elementary derivation. *Tokyo J. Math.*, **32** (2009), 247–251.
- [31] P. A. MACMAHON. *Combinatory Analysis*, vols 1 and 2, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1915, 1916. Reprinted in one volume: New York, Chelsea, 1960.
- [32] S. MUKAI. Geometric realization of T-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, *Algebraic Transformation Groups and Algebraic Varieties*. Berlin, Springer-Verlag, 2004, *Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. **132**, 123–129.
- [33] M. NAGATA. On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 766–772.
- [34] M. NAGATA. On the fourteenth problem of Hilbert. *Proc. Internat. Congress Math.*, 1958, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1960, 459–462.
- [35] A. NOWICKI. *Polynomial Derivations and Their Rings of Constants*. Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Torun, 1994.
[HTTP://WWW-USERS.MAT.UNI.TORUN.PL/~ANOW/POLDER.HTML](http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow/polder.html).
- [36] P. J. OLVER. *Classical Invariant Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [37] P. ROBERTS. An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem. *J. Algebra*, **132** (1990), 461–473.
- [38] R. WEITZENBÖCK. Über die Invarianten von linearen Gruppen. *Acta Math.*, **58** (1932), 231–293.
- [39] G. XIN. A fast algorithm for MacMahon's partition analysis. *Electron. J. Comb.*, **11** (2004), No 1, Research paper R58.
- [40] O. ZARISKI. Interprétations algébriques-géométriques du quatorzième problème de Hilbert. *Bull. Sci. Math., II. Sér.*, **78** (1954), 155–168.

Веселин Дренски
 Институт по математика и информатика
 Българска академия на науките
 ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
 1113 София
 e-mail: drensky@math.bas.bg

DERIVATIONS IN POLYNOMIAL ALGEBRAS

Vesselin Drensky

This is a survey on the relations of the theory of derivations of polynomial algebras in several variables with two branches of commutative algebra: the 14-th Hilbert problem and the classical invariant theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 13N15, 13A50.

Key words: polynomial algebras, derivations, 14-th Hilbert problem, classical invariant theory.