

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013

ДИГИТАЛНА МАТЕМАТИКА

Павел Бойчев

В този доклад се разглежда навлизането на математиката в дигиталната епоха и формирането на *дигитална математика* като обобщение на *цифровата* и на *пръстовата* математика. Описани са някои от проблемите, които се изправят пред математиката и математическото образование, но също и уникалните ползи от дигиталните технологии. Представени са няколко модела на приложение на дигиталната математика и са описани хипотези относно нейното бъдеще.

1. Дигитална вселена. През март 2012 г. Ноам Чомски завършва интервюто си за списание *NewScientist* [1] с думите: „Ако днес преподавате това, което сте преподавали преди пет години, то или вашата дисциплина е умряла, или вие.“ Въпреки, че Чомски говори предимно за лингвистиката и свързаните с нея дисциплини, думите му отразяват проблем в почти всички науки. Дигиталната епоха налага да преразгледаме голяма част от начините, по които опознаваме и изучаваме света, включително и този на дигиталната вселена.

Благодарение на данните, които цифровите устройства улавят, генерират, пращат или съхраняват, обемът на електронното съдържание се удвоява на всеки две години. За първи път бариерата от 10^{22} бита бе премината през 2010 г. [2]. Дигиталната вселена обхваща не само съхранения обем от данни, но и всички поточни данни, които съществуват „на момента“, като излъчванията на цифрова ТВ, разговори през Интернет, цифрово радио, комуникация през безжични мрежи и т.н. На всеки бит, съхраняван някъде по света, съответстват 10^6 „ефирни“ бита. В резултат на това последните пет години са първите в историята на човечеството, в които обемът на съдържанието, създадено от хората, не може да се съхрани изцяло във физически наличната памет. Според доклад на Сиско, през 2013 г. се очаква само през мрежите да преминат поне 10^{21} бита [3]. За разлика от реалната вселена, дигиталната се разширява благодарение на ежедневните дейности на хората. Всяка минута се изпращат над 10 милиона SMS съобщения [4], качват се 60 часа клипове и се гледат 70000 часа видео съдържание [5].

2. Дигитално образование. Традиционният образователен модел е изграден от четири елемента: *училището*, *учебника*, *ученика* и *учителя* (фиг. 1). Под влияние на дигиталната вселена, тяхната роля, а също и взаимодействието помежду им, се променя значително и безусловно.

- *Ученикът.* Днес, дигиталното тегло на човек е 200 ГБ – това е средният обем в световен мащаб на цифрово съдържание, което човек създава или обменя. Огромна част от дигиталното тегло на учениците е изместено извън училището, към дейности отвъд обхвата на образованието. Гледането на 20 видеоклипа на ден излага ученика на повече съдържание, отколкото уроците за един ден.

- *Учебникът*. Общият обем на всички книги съставлява едва 0.000003% от съдържанието на дигиталната вселена. Това отрежда незадоволителна роля на учебниците като източник на информация. Основните информационни канали на съвременния ученик са извън училището, учебника и учителя.
- *Учителят*. Навлизането на хората в дигиталната вселена предоставя две алтернативи на учителя – да влезе и той в нея, или да не влезе¹. В първия случай е необходима реорганизация, която да отчете спецификата на новите поколения и новите технологии. Във втория случай се попада в положението, споменато от Ноам Чомски.
- *Училището*. Промяната, която се налага над ученика, учебника и учителя, неминуемо рефлектира и върху училището.



Фиг. 1. Четирите елемента на образователния модел

Дигиталното образование не трябва да се приема като проблем за решаване, а като възможност за използване. През 2008 г. във Венеция се е състояла научна работна среща под наслов „Науката в 100 думи“^[6] с предизвикателство към група от ученици да определи 100-те думи, които описват най-важните идеи и фактори, определящи тенденциите в съвременните науки. Повечето думи са из областите на генетиката и физиката, но голяма част от тях е свързана с математиката и информатиката като *анализ, безкрайност, вероятност, връзка, грешка, експеримент, измерване, интернет, наука, научен метод, научно изследване, правило, решение, системи, теория, технология*.

3. Дигитална математика. В българският език думата *дигитален* се възприема предимно като *цифров*. Затова и *дигиталната математика* на пръв поглед е синоним на *цифровата математика*, но не и в този доклад. Етимологията на *дигитален* води до латинската дума *digitus*, която означава *пръст* в анатомическия смисъл. През 14ти век думата започва да се използва и за отбелязване на числата до 10, което често ставало с помощта на пръсти. Затова ще разгледаме *дигиталната математика* в контекста на две първоначално изключващи се интерпретации: *цифровата математика* и *пръстовата математика*.

Цифровата математика е проекцията на математиката и математическото образование през призмата на цифровите технологии. Това включва пълния спектър от взаимодействия: от решаването на математически проблеми чрез компютри от

¹Така формулирано се създава чувството за избор. Не хората навлизат в дигиталната вселена, а тя в тях.

най-ново поколение до визуализирането на парабола от урок за квадратното уравнение върху екрана на мобилно устройство. В цифровата математика свойствата и понятията се разглеждат чрез обработване на цифрово съдържание, било то електронна таблица, растеризирана графика или изчислителен алгоритъм.

Основното преимущество на тази математика е, че разкрива нови възможности за развитие както на теоретичната математика, така и на приложната. Успоредно с това цифровите технологии поставят предизвикателства, някои от които са известни от десетилетия. Дали използването на калкулатори намалява способността на учениците да смятат? Дали клавиатурата и мишката допринасят за влошаване на ръкописното писане?

Пръстовата математика е математиката в най-първичния ѝ вид, този в който тя се е зародила. При нея математическите свойства се изследват непосредствено с всички сетива: размерът на нива се измерва с крачки, чертежът се рисува на пясчана дъска, кубът се сглобява от отделни плоскости.

Основното преимущество на пръстовата математика е в генетичната заложба на хората да научават и изучават чрез сетивата си. Най-ярък пример за това са децата: когато вземат дадена играчка за първи път, те я опипват с пръсти, въртят я в ръцете си, опитват се да я захаят. Физическото движение подпомага решаването на проблеми (ученето е частен случай на това) и се наблюдава дори и при възрастни хора. Неслучайно обобщената представа на учен, който решава сложен проблем, е да крачи замислено и да жестикулира на себе си.

На пръв поглед очакването към това, цифровата математика да навлезе в образованието, е да се решат множество проблеми. Първо - става възможно да се работи с изучавания математически обект по начин, който не е физически осъществим (представете си да изучавате конични сечения чрез разрязване на конус). Второ - човек много по-лесно се справя със стреса от грешка (представете си да правите сложен чертеж на черната дъска и да установите, че сте имали грешка още в началото, след като сте решили, че вече е готов).

4. Дигитален песимизъм. Въпреки това, навлизането на технологиите може да се възприеме и като създаване на нови проблеми, понеже цифровата математика заглушава някои от преимуществата на пръстовата математика. Лекотата, с която се оперира с математическите елементи в цифровия им вид, може да доведе до по-повърхностно отношение. Всъщност този аспект на технологиите се забелязва във всяка дейност в образованието. Например, лекотата на достъпа до информация чрез механизмите за търсене в цифровите хранилища на пръв поглед е сериозно преимущество, особено с възможността за семантично търсене. Нещо, което преди е отнемало дни в библиотеката, сега става за секунди. Но на втори поглед се забелязва, че това притъпява анализиращите фази в търсенето. Дали се отнасяме толкова критично към информацията? Дали толкова щателно проверяваме достоверността ѝ? От социална гледна точка пък новите технологии от една страна ни приобщават с хората на другия край на света, но ни изолират от тези, в съседния апартамент... а понякога и от съседната стая.

Затова е смислен въпросът дали поставяйки цифровата технология между ученика и знанието ние създаваме мост, който ги свързва, или стена, която ги разделя.

От средата на миналия век технологията се развива все по-бързо и изпреварва съответното развитие в образованието. Към днешен момент голяма част от тех-

нологията остарява, преди да достигне учениците през учебниците, учителите и училището.



Фиг. 2. Технологията в образованието

Пътят от технологията към ученика е много по-пряк спрямо пътя, който достига до ученика през училището, учителя и учебника (фиг. 2). Това може да доведе до прилагане на технологията по начин, който да е по-вреден, отколкото полезен. Някои от тези неудачни приложения са:

- *Изучаването на конкретна технология, а не принципите ѝ.* Пример: дълбокото и обстойно изучаване на менютата и диалоговите прозорци на конкретен програмен продукт.
- *Залитането изцяло към конкретна технология, вместо да се вземе най-доброто от всяко нещо.* Пример: пълното заместване на изложението върху черна дъска с предварително подготвени компютърни презентации.
- *Подменянето на дейности, изискващи повече усилия (и осмисляне!), с такива, които са по-леки.* Пример: всички чертежи се правят само чрез програма; линийката, моливът и пергелът са изцяло забравени.
- *Абдикиране от някои преподавателски дейности и доброволното им предаване на новите технологии.* Пример: оценяване само чрез тестове, а не чрез разговор.

Проблемите, породени от цифровата технология, изострят технологичната пропаст между поколенията до степен да се говори за *пропасти* в рамките на едно поколение. Те изпъкват най-ясно при избора на комуникационни и развлекателни технологии. Проф. Лари Росен от *Калифорнийския държавен институт* говори за изтъняване на технологичните поколения до 10, а понякога дори до 5 години. *Net-поколението* (на 20-30 годишните) и *iПоколението* (на 10-20 годишните) възприемат и чувстват новите технологии по качествено различен начин [7].

В контекста на дигиталната математика песимизмът се изразява в раздвоението между цифровата и пръстовата математика. Цифровата математика получава все по-явно доминантна роля, измествайки пръстовата, вместо да я допълва. Затова и първоначалната еуфория от навлизането на новите технологии в математиката и обучението по математика дава вече признаци на избледняване.

5. Дигитален оптимизъм. През есента на 2012 г. в обновения изцяло курс *Основи на компютърната графика* във ФМИ, СУ бе представена кратка история на компютърната графика. Периодът 2010–2019 бе определен като „*Десетилетието, в което Компютърната графика ще престане да е такава, каквато я познаваме през*

последните 50 години“. Дори подобно твърдение да може малко или много да се приложи и към други дисциплини, включително и математиката, това е всъщност проява на дигитален оптимизъм. Науките ще се представят по много по-различен начин.

Дигитална прозрачност. От гледна точка на потребителите технологиите постепенно ни приближават към бъдещето на дигитална прозрачност – цифровите устройства стават все по-прозрачни, все по-ориентирани към т. нар. *добавена реалност*, все по-близки до реалното *пръстово* опознаване на света. Затова очакванията са, че както технологията в началото раздели цифровата от пръстовата математика, така сега ще успее да ги събере отново. Прозрачността на устройствата се състои в тенденцията да стават по-интуитивни и незабележими за потребителите. Използвайки някакво мобилно устройство, все по-малко се ангажираме с това, да преценим какво точно да натиснем, а повече време отделяме на същинската дейност.

Дигитална осезаемост. В разговор с проф. Ричард Нос, директор на London Knowledge Lab (www.lkl.ac.uk), относно приложението на новите технологии в обучението по математика, беше дискутирана идеята как устройствата със сензорен екран ни дават усещане за почти физическо манипулиране на математически обекти. Например, с плъзгане на пръсти можем „да свием“ една окръжност до елипса, като в същото време наблюдаваме изменението на параметрите. Или пък с жестове можем да завъртим стереометрична конструкция, да влезем в нея и да разгледаме отблизо интересуващите ни елементи. Споменатата по-горе *добавена реалност* е всъщност *текущото върхово състояние да се постигне истинска, поглъщаща виртуална реалност, в която човек е потопен с всички свои сетива*.

Паралелно на това направление учените по света разглеждат и друга алтернатива. Вместо да се добавя реалност във виртуалността, добавя се виртуалност в реалността. Един от подходите е да се вградят или отпечатаат микро-кодове върху повърхността на реален обект и със специални устройства тези кодове могат да се разчитат и да се обработват след това софтуерно [8]. Подобни изследвания се извършват в Университета в Шизуока с кодове, налагани върху практически всякакви повърхности, превръщайки ги в семантични повърхности. Тези CLUSPI (Cluster Pattern Interface)-кодове са изобретени от проф. К. Канев и проф. С. Кимура [9] и са приложими в широк кръг от области. Вляво на фиг. 3 е показан пример на прогноза на времето, отпечатана на CLUSPI-хартия. След докосването на името на град се отваря сайт с актуална информация за локалното време. Вдясно е показан оригами-модел на риба. Докосването до различни зони на рибата активира дейности от превод на жестомимичен език на думата *риба* до връзки към допълнителна информация за рибите. Съчетаването на семантични повърхности с другите технологии в обучението довежда до вече проходащото направление на Tangible TEL – т.е. обучение, подпомогнато от технологии и осезание [10].

Дигитални медии. Основна видима характеристика на дигиталните технологии е експанзията на дигиталните медии. Тяхното влияние върху дигиталната математика може да се отчете в използването на проявяването на математически идеи в медии, които не са насочени конкретно към математиката. Удобна медия се оказват филмите и кратките видео клипове. В тази секция ще представим няколко видео клипа и един такъв филм.

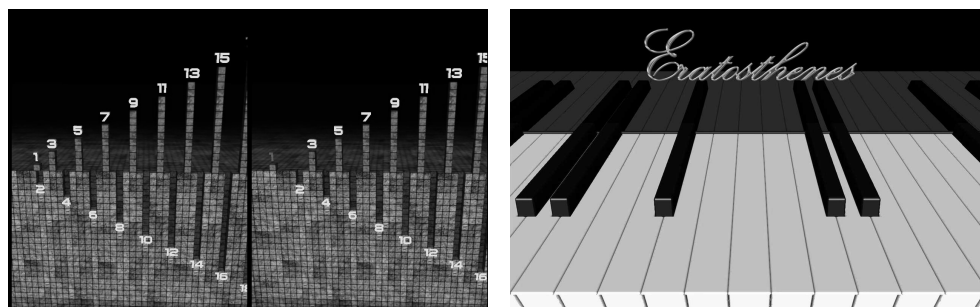


Фиг. 3. Всяка повърхност може да се превърне в активна семантична повърхност

Представянето на дигиталната математика чрез цифрови медии не изисква математическите понятия и идеи „да се скриват“ – те могат да бъдат напълно явно изразени. Отделно от това, не е нужно дигиталното съдържание да е прекалено голямо като обем или продължително като време.

Пропастта на безкрайността (youtu.be/g7x-tRBQ2gw) илюстрира математическия парадокс при използването на стандартни и детерминирани математически операции над безкрайно множество от числа. А именно, сумата $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ може да бъде изчислена по различни начини, получавайки противоречиви отговори. Ако се групират членовете така $(1 - 2) + (3 - 4) + \dots$ се получава $(-1) + (-1) + \dots$ което е отрицателна безкрайност, но ако се групират така $1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \dots$ се получава $1 + 1 + \dots$ което е положителна безкрайност (фиг. 4, вляво). А в същото време, Ойлер е определил, че сумата е $1/4$.

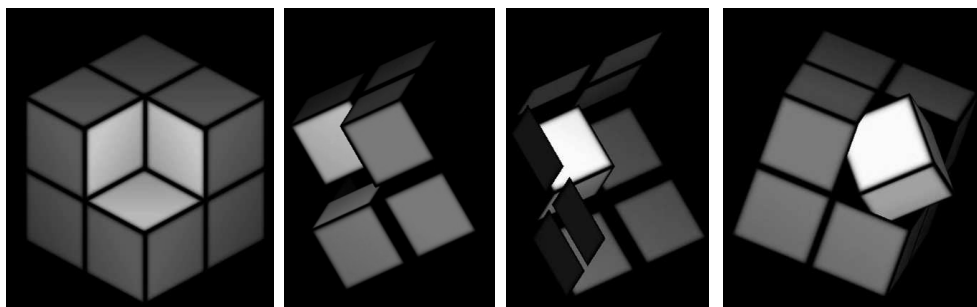
Клипът *Пиано на Ератостен* (<http://youtu.be/WPXUeqixu0o>) представя задача-главоблъсканица. Показано е пиано със странна клавиатура (фиг. 4, дясно). Белите и черните клавиши не следват традиционната подредба на клавирните инструменти. Предизвикателството е да се определи какви по цвят са следващите клавиши. Отговорът на загадката е, че клавишите символизират естествените числа, а черните клавиши отговарят на простите числа.



Фигура 4. Кадри от Пропастта на безкрайността и Пиано на Ератостен

Някои оптически илюзии се основават на нееднозначността при проектирането на тримерен обект върху двумерна повърхност. Зрителят често и невяно приема определена ориентация на обектите в илюзията, но при друга ориентация се получават други обекти. Клипът *Логическата илюзия в една оптическа илюзия*

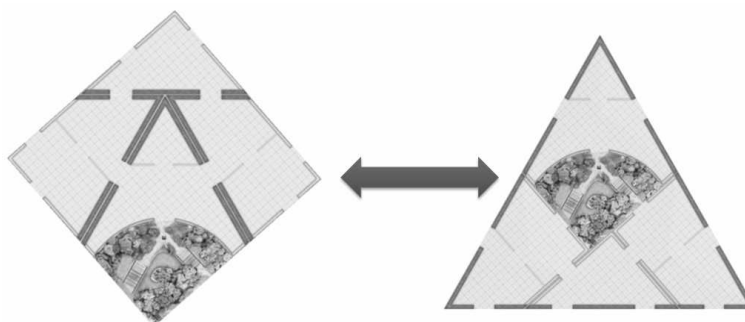
(youtu.be/WGfkNV61IUU) показва конструкция, която някои хора приемат като изпъкнала, а други като вдлъбната (фиг. 5). Логическата илюзия е в това, че има и други интерпретации, една от които е показана най-вдясно на фигура 5.



Фиг. 5. Логическа илюзия, че има само две интерпретации на оптическа илюзия

Филмът *Сгъваемата къща* е създаден през 2012. Той възплъщава идеи от различни измерения на човешката дейност – от теоретична наука и инженерство до екология, образование и изкуство. В началото на 2013 г. е избран да участва в откриването на изложбата „Математиката на планетата Земя“ в централата на ЮНЕСКО в Париж.

Историята на филма започва преди повече от век, когато Хенри Дюдни предлага задача известна днес като *Задачата на галантериста*. Проблемът е да се разреже равнобедрен триъгълник с три прави разреза на 4 части от които да може да се сглоби квадрат. Сгъваемата къща следва решението на задачата, като съставена от четири дяла, три от които могат да се въртят. На фигура 6 са показани двете крайни конфигурации.

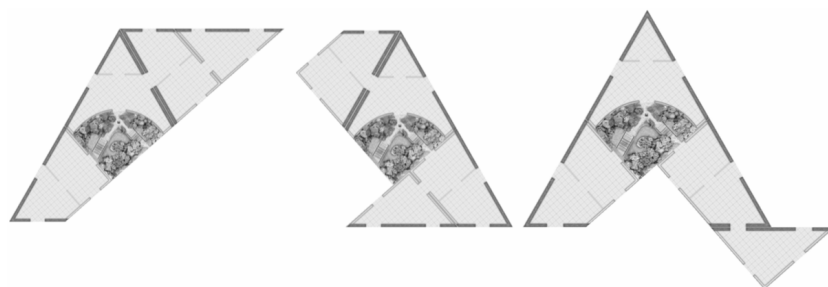


Фиг. 6. Сгъваемата къща в двете ѝ крайни конфигурации

Освен че е изграден около задача, филмът предоставя връзки към няколко други математически понятия: *ротационна симетрия*, *перспектива*, *комбинаторика*.

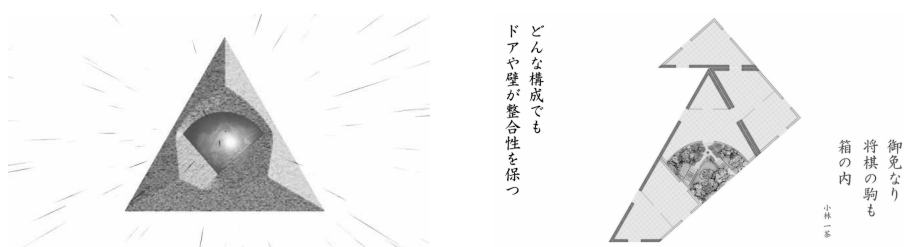
Три от дяловете се въртят около оси така, че при всяка конфигурация с допиращи се стени, вратите си съответстват. Поради ротационната симетрия къщата е проходима във всеки момент. Колко са различните конфигурации на къщата при

допрени стени? Това е интересен въпрос, който може да бъде поставен на ученици. При наличие на три подвижни дяла, всеки от които може да е долепен в единия или в другия си край, броят на конфигурациите може да се намери и чрез изчисление, и чрез проиграване на всички възможности. Три от конфигурациите са показани на фигура 7.



Фиг. 7. Ротация на дялове на къщата и две от междинните ѝ конфигурации

При повечето онагледявания на перспективата чрез реални сцени се използват железопътни релси, маркировка на път или ръбове на сгради. При съгъваемата къща е избран различен начин на онагледяване. В част от филма се показва къщата по време на дъжд – (фиг. 8, вляво). Самата реализация на дъжда е представена погледната отгоре и скосяването на траекториите на капките е благодарение на перспективата, като убежната точка е в средата на къщата.



Фиг. 8. Изобразяване на перспектива (ляво) и класически стих хайку (дясно)

Интересен аспект на дигиталната математика е лекотата, с която се осъществяват интердисциплинарни връзки. Филмът за съгъваемата къща се докосва до области, които нямат пряка връзка с математиката. Ето някои от тях:

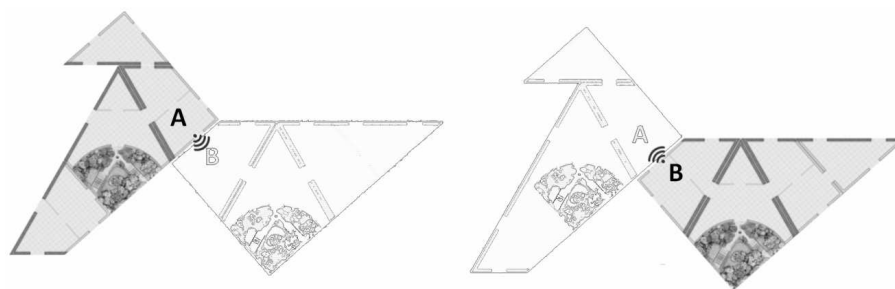
Архитектура, градски дизайн и метеорология: Част от стените на къщата са плътни и масивни, други са прозрачни и олекотени. При лошо време къщата може да се сгъне така, че отвън да са плътните стени. При добро време тя може да се разгърне и да предостави 360-градусова панорамна гледка. Според времето и сезона къщата може да променя своето изложение.

Компютърна графика, дигитални изкуства, компютърни науки: Филмът е създаден предимно софтуерно. Въртенето на дяловете и формирането на различни конфигурации, представянето на дъжда и сезоните – всичко това е реализирано софтуерно. Създаването на филма е включено като тема в курса *Основи на ком-*

пютърната графика във ФМИ/СУ. Средата, с която той е създаден, се използва в четири други курса на бакалавърско и магистърско ниво: *Езици и среди за обучение*, *Компютърна графика*, *Компютърна графика в обучението* и *Геометрия на движението*.

История, култура, поезия: Сцените във филма са придружени с класическо хайку (фиг. 8, дясно). Избрани са творения на осем от най-известните хайку поети от ранга на Башо, Бусон и Исса. Хармонията на природата и формите, създадени от човек, се подсилват с японската градина в къщата, която може да се трансформира от лятна в зимна градина. Всичко това предопредели филмът да бъде създаден на японски език.

Добавена реалност и социална свързаност: Основната социална роля на къщата е да поддържа социо-сферата. Благодарение на технологиите две къщи могат да се свържат виртуално, като по този начин предоставят общо социално физическо пространство. На фигура 9 е показан вариант, при който стена от къща се ползва като екран, на който се показва сцена от друга къща и обратно. Възможността за изграждане на виртуални комплекси е благодарение на вътрешните стени на къщата, които са дигитални мултимедийни устройства. Те могат да играят ролята на прозорци (когато са напълно прозрачни), стени (когато са непрозрачни) и екрани за виртуална и добавена реалност.



Фиг. 9. Виртуални комплекси от къщи

6. Бъдещето на дигиталната математика. Навлизането на дигиталната математика в математиката и математическото образование неминуемо променя отношението на хората към математиката. Сега сме на прага, когато цифровата математика и пръстовата математика ще се слоят изцяло. Когато това стане, учените, учителите и учениците няма да гледат, четат или пишат математически текстове, а просто *ще изживяват* математическите понятия.

Технологичните умни устройства, които ще ни помогнат в това, ще стават все незабележими и ненавратливи, до момента в който ще се чувстваме изцяло потопени в реалната или виртуалната реалност.

Процесът на учене и училището като институция ще бъдат изцяло променени. Моделът, при който ученето е концентрирано в предварително обществено-приемливи времеви и пространствени рамки, ще бъде заменен с модел, при който ученето е непрекъснат процес от най-ранна до най-зряла възраст, без ограничения по място и време.

Всъщност тази промяна на модела вече е започнала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. LAWTON. Noam Chomsky: Meet the universal man. *NewScientist* (2856), 19.03.2012. Достъпен на <http://www.newscientist.com/article/mg21328560.200-noam-chomsky-meet-the-universal-man.html> (15.02.2013)
- [2] J. GANZ, D. REINSEL. Extracting Value from Chaos. IDC iView, 2011. Достъпен на <http://www.emc.com/collateral/analyst-reports/idc-extracting-value-from-chaos-ar.pdf> (15.02.2013)
- [3] M. MILLER. Cisco: Internet Moves 21 Exabytes per Month. *PCMag*, 2010. Достъпен на <http://www.pcmag.com/article2/0,2817,2361820,00.asp> (15.02.2013)
- [4] Statista.com. Global Number of SMS Sent per Second 2007–2010. ITU, Statista.com. Достъпен на <http://www.statista.com/statistics/167048/number-of-sms-sent-per-second-worldwide-since-2007/> (15.02.2013)
- [5] L. GROSSMAN. The Beast With A Billion Eyes. *TIME*, 30.01.2012. Достъпен на <http://www.time.com/time/magazine/article/0,9171,2104815,00.html> (15.02.2013)
- [6] M. PRUNOTTO. Shaping science education in just 100 words. *Nature*, **455** (2008), стр. 460. Достъпен на http://www.100parole.it/sites/default/themes/centoparole/pdf/article_nature.pdf (15.02.2013)
- [7] B. STONE. The Children of Cyberspace: Old Fogies by Their 20s“. *The New York Times*, 9.01.2010. Достъпен на <http://www.nytimes.com/2010/01/10/weekinreview/10stone.html> (15.02.2013)
- [8] K. KANEV. Tangible Interfaces for Interactive Multimedia Presentations. *Int. Journal of Mobile Information Systems*, **4** (2008), бр. 3, 183–193.
- [9] K. KANEV, S. KIMURA. Digital Information Carrier, Patent No 7711139 B2, 2010.
- [10] P. BOYTCHIEV, K. KANEV, R. NIKOLOV. Technology Enhanced Learning with Subject Field Multiplicity Support. В тома на *Joint International Conference on Human Centered Computer Environments*, HCCE 2012, Хамамацу, Япония, ACM, 39–44.

Павел Бойчев
Факултет по математика и Информатика
Софийски Университет Св. Кл. Охридски
бул. Дж. Баучер № 5
1164 София
e-mail: boytchev@fmi.uni-sofia.bg

DIGITAL MATHEMATICS

Pavel Boytchev

This paper discusses the entering of mathematics in the digital era and the formation of digital mathematics. The term *digital mathematics* refers to mathematics in two contexts: technologically digital mathematics and biologically digital mathematics. Some of the problems mathematics and mathematical education are facing today, as well as the unique advantages of the digital technologies are considered. Several examples of digital mathematics applications are presented.