

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
*Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013*

ГЕОМЕТРИЧНИ МЕСТА ПРИ ДВИЖЕНИЕ
НА ВПИСАН ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Сава Гроздев, Веселин Ненков

На нашия приятел Светльо Дойчев

Ако един четириъгълник е едновременно вписан и описан спрямо конични сечения k_1 и съответно k_2 , то съгласно известна теорема на Понселе той може да се движи така, че да остава вписан и описан спрямо тези конични сечения. При движението различните забележителни точки на четириъгълника описват определени геометрични места, на които е посветена настоящата статия в случай, че k_1 е окръжност.

Увод. Всеки равнинен четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$ притежава безкрайно множество от описани конични сечения, както и безкрайно множество от вписани конични сечения. Ако k_1 и k_2 са такива конични сечения, че четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в k_1 и описан около k_2 , според една теорема от геометрията на коничните сечения, известна като *теорема на Понселе*, $A_1A_2A_3A_4$ може да се движи по такъв начин, че да остава постоянно вписан в k_1 и описан около k_2 . При това движение различните забележителни точки на $A_1A_2A_3A_4$ също се движат и описват определени геометрични места. Ще разгледаме някои такива геометрични места в случаите, когато k_1 е окръжност. Наблюденията се осъществяват с помощта на конструктивните и динамични възможности на програмата The Geometer's Sketchpad (GSP). Преди тези наблюдения и получаването на съответни резултати е представена една формулировка на споменатата теорема на Понселе и някои свойства на четириъгълниците.

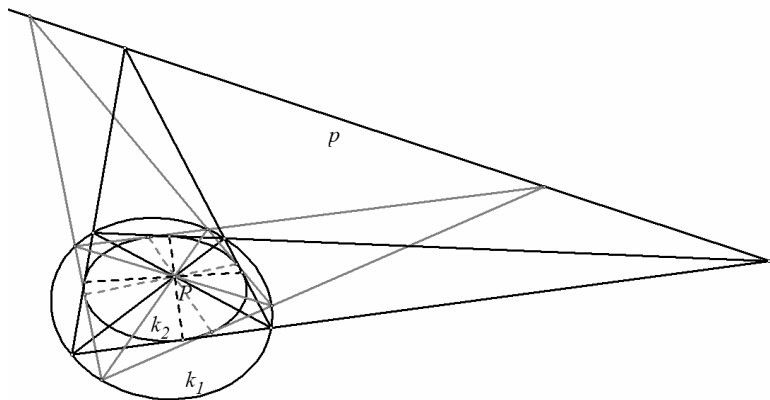
1. Теорема на Понселе за четириъгълниците. Нека k_1 е едно описано за четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ конично сечение, а k_2 е негово вписано коничното сечение, като правите A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 се допират до k_2 съответно в точките T_1 , T_2 , T_3 и T_4 . След като кривите k_1 и k_2 са фиксирани, четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ може да се възстанови само по една от точките A_j и T_j ($j = 1, 2, 3, 4$) чрез построяване на допирателни към k_2 и намиране на пресечните им точки с k_1 . Затова, когато k_1 и k_2 са предварително известни, ще казваме, че всяка от тези точки *поражда четириъгълник* $A_1A_2A_3A_4$, *вписан в* k_1 *и описан около* k_2 . Относно пораждането на

четириъгълници, вписани в една крива и описани около друга, е известна теоремата на Понселе, която може да се формулира по следния начин:

Теорема 1.1. *Ако две конични сечения k_1 и k_2 са разположени в равнината по такъв начин, че съществува четириъгълник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 , то всяка точка от тези конични сечения поражда четириъгълник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 .*

Горната теорема е открита от френския математик Понселе в по-обща форма, която се отнася до многоъгълници с произволен брой върхове. Доказателство на тази по-обща теорема може да се намери в [1]. Доказателство на теорема 1.1, когато k_1 и k_2 са окръжности и k_2 се намира вътре в k_1 , се съдържа в [2]. Доказателство на по-общото твърдение, отнасящо се за многоъгълници, вписано-описани за окръжности k_1 и k_2 , като k_2 се намира в k_1 , може да се намери в [3]. Тук няма да доказваме тази теорема, а само ще споменем някои свойства на четириъгълниците, породени от теоремата на Понселе.

Следствие 1.1. *Четириъгълниците, които са едновременно вписани в крива k_1 и описани около крива k_2 , притежават свойствата: 1) диагоналите на всички четириъгълници се пресичат в една точка P ; 2) допирните точки на двойките срещуположни страни на всеки четириъгълник с k_2 определят прави, минаващи през P ; 3) двойките срещуположни страни на всеки четириъгълник се пресичат върху една постоянна права p ; 4) точката P и правата p са полюс и поляра едновременно спрямо k_1 и k_2 (Фиг. 1).*



Фиг. 1

Когато k_1 и k_2 са окръжности, от теорема 1.1 получаваме:

Следствие 1.2. *Ако две неконцентрични окръжности k_1 и k_2 са разположени в равнината по такъв начин, че съществува четириъгълник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 , то съществува единствен делтоид, който е вписан в k_1 и е описан около k_2 .*

Пълно доказателство на теорема 1.1 и твърденията, формулирани като следствия от нея, се съдържат в статията на авторите [4].

2. Някои забележителни точки на четириъгълника. По-нататък ще разглеждаме само четириъгълници без успоредни страни, за които ще отбележим някои добре известни свойства, свързани със забележителни точки, прави и окръжности. Геометричните обекти ще разглеждаме в комплексната равнина. Както обикновено, ще означаваме точките с големи букви, а афиксите им – със съответните им малки букви.

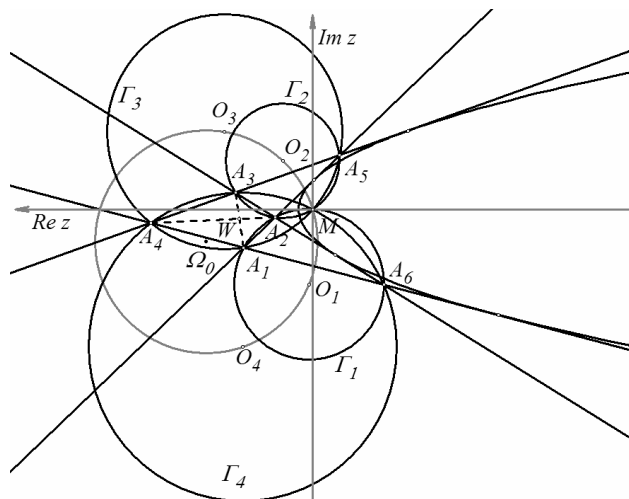
2.1. Забележителни точки и линии в четириъгълника. Нека правите, върху които лежат страните на четириъгълник $A_1 A_2 A_3 A_4$, образуват триъгълници Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 и Δ_4 . Съответните описани окръжности Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 на тези триъгълници минават през една точка M , наречена *точка на Микел* [5]. Точката на Микел е фокус на единствената вписана в $A_1 A_2 A_3 A_4$ парабола π (Фиг. 2). Спрямо Гаусова координатна система с център фокусът на π , както е показано на фиг. 2 и 3, върховете на $A_1 A_2 A_3 A_4$ могат да се опишат с равенствата

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2p}{(1+t_4)(1+t_1)}, & a_2 &= \frac{2p}{(1+t_1)(1+t_2)}, \\ a_3 &= \frac{2p}{(1+t_2)(1+t_3)}, & a_4 &= \frac{2p}{(1+t_3)(1+t_4)}, \end{aligned}$$

където $|t_j| = 1$, а p е фокалният параметър на π .

Освен това, ако $A_5 = A_1 A_2 \cap A_3 A_4$, $A_6 = A_2 A_3 \cap A_4 A_1$ и $A_1 A_3 \cap A_2 A_4 = W$, то

$$(2) \quad \begin{aligned} a_5 &= \frac{2p}{(1+t_1)(1+t_3)}, & a_6 &= \frac{2p}{(1+t_2)(1+t_4)}, \\ w &= \frac{2p(t_1-t_3)(t_2-t_4)(t_2+t_4-t_1-t_3)}{(t_1-t_3)(t_2-t_4)[(t_2+t_4)(1-t_1t_3)-(t_1+t_3)(1-t_2t_4)]-2(t_1-t_3)(t_2-t_4)(t_2t_4-t_1t_3)}. \end{aligned}$$



Фиг. 2

Центровете O_1 , O_2 , O_3 и O_4 съответно на Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 лежат на една окръжност, минаваща през точката на Микел (Фиг. 2). Тази окръжност се нарича *окръжност*

на Щайнер. За центъра Ω_0 на окръжността на Щайнер е изпълнено равенството

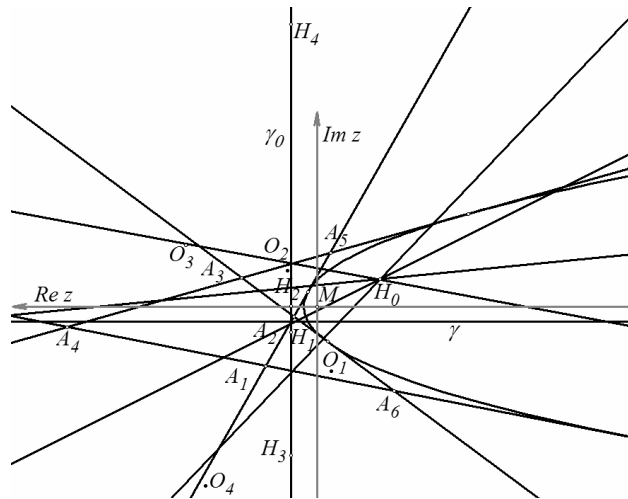
$$(3) \quad \omega_0 = \frac{2p}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}.$$

Перпендикулярите, издигнати от центровете на Фойербаховите окръжности към съответните Ойлерови прави на триъгълниците $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ_4 , се пресичат в една точка H_0 , която се нарича *точка на Харви* (Фиг. 3). Афиксът на точката на Харви се изразява с равенството

$$(4) \quad h_0 = \frac{2p(1+t_1+t_2+t_3+t_4)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}.$$

По отношение на ортоцентровете на триъгълниците $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ_4 е известно, че те лежат на една права, която е директрисата на π , и се нарича *права на Гаус-Боденмилер* (Фиг. 3). Уравнението на правата на Гаус-Боденмилер е следното:

$$(5) \quad z + \bar{z} = 2p.$$



Фиг. 3

С името на Гаус е свързана още една права, която минава през средите на отсечките A_1A_3, A_2A_4 и A_5A_6 (Фиг. 3). Тази права се нарича *права на Гаус* и има следното уравнение

$$(6) \quad z - \bar{z} = \frac{2+t_1+t_2+t_3+t_4-t_1t_2t_3-t_2t_3t_4-t_3t_4t_1-t_4t_1t_2-2t_1t_2t_3t_4}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)} \cdot p.$$

Правата на Гаус съдържа центровете на всички вписани в $A_1A_2A_3A_4$ конични сечения [6]. Освен това от (5) и (6) се вижда, че правата на Гаус е перпендикулярна на правата на Гаус-Боденмилер.

Накрая ще отбележим, че правите, свързващи върховете на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ с медицентровете на триъгълниците, определени от останалите върхове, се пресичат в една точка G , наречена *медицентър* на $A_1A_2A_3A_4$. За медицентъра

при произволна точка O в пространството е изпълнено равенството:

$$(7) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}).$$

Медицентърът G на $A_1A_2A_3A_4$ е среда на отсечката, свързваща средите на диагоналите A_1A_3 и A_2A_4 . Следователно G лежи върху правата на Гаус за $A_1A_2A_3A_4$.

2.2. Свойства на забележителните точки и линии във вписан четириъгълник. В случай, че четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност, отбелязаните забележителни точки, прави и окръжности притежават допълнителни свойства.

Уравненията на симетралите s_1, s_2, s_3, s_4 на отсечките $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ са съответно

$$\begin{aligned} s_1 : t_1z - \bar{z} &= \frac{2pt_1(1-t_2t_4)}{(1+t_4)(1+t_1)(1+t_2)}, & s_2 : t_2z - \bar{z} &= \frac{2pt_2(1-t_1t_3)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}, \\ s_3 : t_3z - \bar{z} &= \frac{2pt_3(1-t_2t_4)}{(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}, & s_4 : t_4z - \bar{z} &= \frac{2pt_4(1-t_1t_3)}{(1+t_3)(1+t_4)(1+t_1)}. \end{aligned}$$

Ако $s_1 \cap s_3 = \Omega_1$ и $s_2 \cap s_4 = \Omega_2$, от тези уравнения следва, че

$$(8) \quad \omega_1 = \frac{2p(1-t_2t_4)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}, \quad \omega_2 = \frac{2p(1-t_1t_3)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}.$$

Можем да заключим, че $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност точно когато е изпълнено равенството

$$(9) \quad t_1t_3 = t_2t_4.$$

Ако центърът на тази окръжност е Ω , от същите равенства се получава още, че

$$(10) \quad \omega = \frac{2p(1-t_1t_3)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)} = \frac{2p(1-t_2t_4)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}.$$

От (2) се получава равенството $\bar{a}_5a_6 - a_5\bar{a}_6 = \frac{2p(t_1t_3 - t_2t_4)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}$, което заедно с (9) води до извод, който формулираме по следния начин:

Теорема 2.1. *Точката на Микел за четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ лежи върху правата, определена от пресечните точки на срещуположните му страни точно когато $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност (Фиг. 4).*

От (2) и (9) следва

$$(11) \quad w = \frac{2p}{1-t_1t_3}.$$

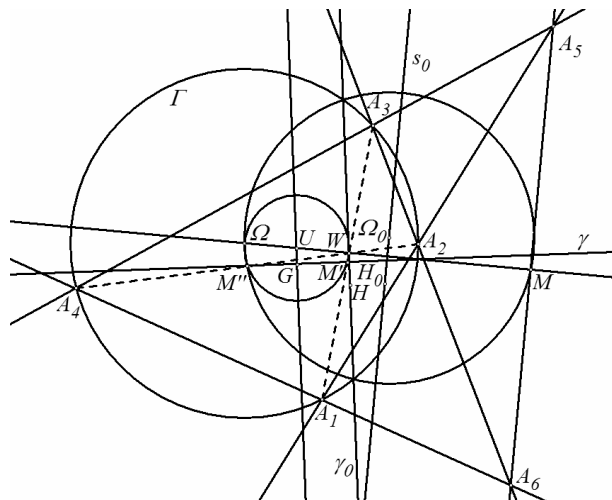
Последното заедно с (10) води до равенството $w\bar{\omega} = \bar{w}\omega$, т.е. Ω, W и M лежат на една права. Освен това от (2), (9) и (10) се получава, че $(a_5 - a_6) \cdot \bar{\omega} + (\bar{a}_5 - \bar{a}_6) \cdot \omega = 0$, т.е. $M\Omega \perp A_5A_6$. Последните резултати обобщаваме в следната:

Теорема 2.2. *Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност, то центърът на описаната окръжност, пресечната точка на диагоналите и точката на Микел за $A_1A_2A_3A_4$ лежат на една права, която е перпендикулярна на правата, определена от пресечните точки на срещуположните му страни (Фиг. 4).*

Нека сега s_0 е симетралата на отсечката $M\Omega$. За уравнението на s_0 имаме $s_0 : \bar{\omega}z + \omega\bar{z} - \omega\bar{\omega} = 0$. От уравнението на s_0 , (3) и (4), като се вземе предвид

условието (9), се получава следната:

Теорема 2.3. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност, то центърът на окръжността на Шайнер и точката на Харви лежат на симетралата s_0 на отсечката, определена от центъра на описаната окръжност и точката на Микел (Фиг. 4).



Фиг. 4

Правите, минаващи през средите на страните на четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$, перпендикулярно на срещуположните им страни, се пресичат в една точка H , наречена ортоцентър на $A_1A_2A_3A_4$ [7]. За точката H е изпълнено векторното равенство $\vec{\Omega H} = \frac{1}{2} (\vec{\Omega A_1} + \vec{\Omega A_2} + \vec{\Omega A_3} + \vec{\Omega A_4})$ [7]. От това равенство и (7) се вижда, че H се получава от медицентъра G при хомотетия с център Ω и коефициент 2. От същото равенство и (10), с помощта на (9), се получава

$$(12) \quad h = \frac{2 + 2 \sum_{k=1}^4 t_k + \sum_{1 \leq k \neq j \leq 4} t_k t_j}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)},$$

$$\bar{h} = \frac{2 \prod_{k=1}^4 t_k + \sum_{1 \leq k \neq j \leq 4} t_k t_j + 2 \sum_{1 \leq k \neq j \neq l \leq 4} t_k t_j t_l}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}.$$

След заместване на (12) в (4) получаваме:

Теорема 2.4. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност, то ортоцентърът му лежи върху неговата права на Гаус-Боденмилер γ_0 (Фиг. 4).

От (11) и (5) за правата на Гаус-Боденмилер получаваме и следната:

Теорема 2.5. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност, то пресечната точка на диагоналите му лежи върху неговата права на Гаус-Боденмилер γ_0 (Фиг. 4).

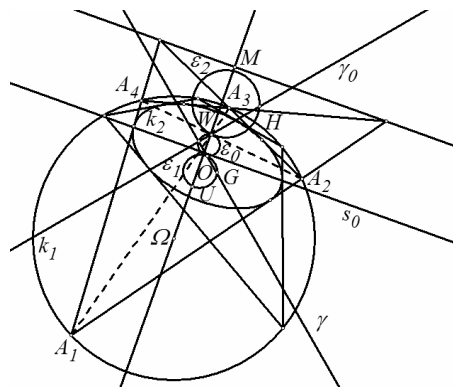
Една забележителна окръжност за вписания четириъгълник се получава, като с помощта на (2), (9), (10) и (11) се установи, че $WM' \perp \Omega M'$ и $WM'' \perp \Omega M''$. Тук M' е средата на A_1A_3 , а M'' е средата на A_2A_4 . По-точно, изпълнена е следната:

Теорема 2.6. *Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност Γ , то средите на диагоналите му, пресечната им точка и центърът на описаната окръжност Γ лежат на окръжност с център средата на отсечката, определена от пресечната точка на диагоналите му и центъра на описаната окръжност Γ (Фиг. 4).*

От последното твърдение получаваме и следната:

Теорема 2.7. *Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност Γ , то неговата права на Гаус γ е перпендикулярна на правата, минаваща през медицентъра на $A_1A_2A_3A_4$ и средата на отсечката, определена от пресечната точка на диагоналите му и центъра на описаната окръжност Γ (Фиг. 4).*

3. Геометрични места на забележителни точки на вписан в окръжност и описан около конично сечение четириъгълник. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 с център Ω и описан около конично сечение k_2 с център O . От теорема 1.1 следва, че произволна точка B_1 от k_1 поражда четириъгълник $B_1B_2B_3B_4$, който е вписан в k_1 и описан около k_2 . Затова можем да разглеждаме $B_1B_2B_3B_4$ като получен от движението на $A_1A_2A_3A_4$ по окръжността k_1 и кривата k_2 . От Следствие 1.1 се вижда, че при това движение пресечната точка на диагоналите и правата, минаваща през пресечните точки на двойките срещуположни страни, остават постоянни. Интересно е да се определят и геометричните места на разгледаните забележителни точки.



Фиг. 5

3.1. Геометрично място на точката на Микел. От теорема 2.1, теорема 2.2 и следствие 1.1 се получава следното твърдение:

Теорема 3.1. *Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около конично сечение k_2 , то при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 точката на Микел остава неподвижна (Фиг. 5).*

В частния случай, когато k_2 е окръжност, според следствие 1.2, движещият се четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$ в някакъв момент ще заеме положение на делтоид. Тогава

точката на Микел ще лежи върху оста на симетрия на този делтоид, т.е. върху централата на окръжностите k_1 и k_2 . Така, като вземем предвид следствие 1.1, стигаме до следния извод:

Следствие 3.1. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около окръжност k_2 , точката на Микел е пресечната точка на централата на k_1 и k_2 с правата, определена от пресечните точки на двойките срещуположни страни (Фиг. 6).

3.2. Геометрично място на центъра на окръжността на Щайнер и точката на Харви. Тъй като Ω е неподвижна точка, а според теорема 3.1 и точката на Микел има същото свойство, получаваме:

Теорема 3.2. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около конично сечение k_2 , то при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 центърът на окръжността на Щайнер и точката на Харви описват една и съща права s_0 (Фиг. 5).

В частния случай, когато k_2 е окръжност, както при следствие 3.1, получаваме:

Следствие 3.2. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около окръжност k_2 , центърът на окръжността на Щайнер и точката на Харви описват симетралата s_0 на отсечката, определена от центъра на k_1 и точката на Микел (Фиг. 6).

3.3. Геометрично място на пресечната точка на правата на Гаус и правата на Гаус-Боденмилер. Беше отбелязано, че правата на Гаус γ съдържа центровете на всички вписани в $A_1A_2A_3A_4$ конични сечения. Следователно постоянната точка O лежи върху γ . От друга страна, пресечната точка на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$, според теорема 2.5, лежи върху правата на Гаус-Боденмилер γ_0 . Но, според следствие 1.1, тази точка е неподвижна при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 . Затова γ_0 минава през постоянната точка W . Така забелязваме, че всяка от двете перпендикулярни прави γ и γ_0 минава през една постоянна точка. Следователно постоянната отсечка OW се вижда от пресечната точка на γ и γ_0 под прав ъгъл при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 . Така получихме:

Теорема 3.3. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около конично сечение k_2 , то при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 пресечната точка на правата на Гаус и правата на Гаус-Боденмилер описва окръжност ε_0 с диаметър пресечната точка на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$ и центъра на k_2 (Фиг. 5).

В частния случай, когато k_2 е окръжност, според следствия 1.1 и 1.2, се получава:

Следствие 3.3. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около окръжност k_2 , диаметърът на окръжността ε_0 лежи върху централата на k_1 и k_2 (Фиг. 6).

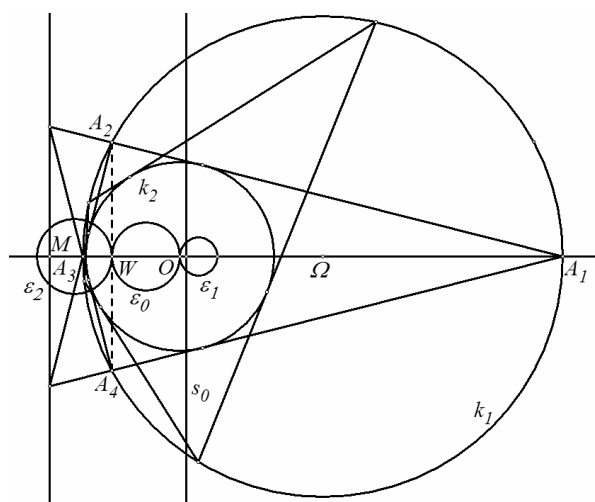
3.4. Геометрично място на медицентъра. Медицентърът на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ лежи върху правата на Гаус γ , която от своя страна минава през постоянната точка O (центърът на k_2). Освен това, ако U е средата на отсечката $W\Omega$, от теорема 2.7 следва, че правата GU е перпендикулярна на γ . Това означава, че

постоянната отсечка OU се вижда от медицентъра G под прав ъгъл при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 . Така получихме следната:

Теорема 3.4. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около конично сечение k_2 , то, при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 , медицентърът на $A_1A_2A_3A_4$ описва окръжност ε_1 с диаметър, определен от центъра на k_2 и средата на отсечката, свързваща пресечната точка на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$ и центъра на k_1 (Фиг. 5).

В частния случай, когато k_2 е окръжност, според следствия 1.1 и 1.2, се получава:

Следствие 3.4. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около окръжност k_2 , диаметърът на окръжността ε_1 лежи върху централата на k_1 и k_2 (Фиг. 6).



Фиг. 6

3.5. Геометрично място на ортоцентъра. От теорема 3.4 е известно, че точките G и U лежат на специална окръжност ε_1 . От друга страна ортоцентърът H и пресечната точка на диагоналите W на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ се получават съответно от G и U при хомотетия с център Ω и коефициент 2. Следователно е изпълнена следната:

Теорема 3.5. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около конично сечение k_2 , то при движението на $A_1A_2A_3A_4$ по k_1 и k_2 ортоцентърът на $A_1A_2A_3A_4$ описва окръжност ε_2 , минаваща през пресечната точка на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$ (Фиг. 5).

В частния случай, когато k_2 е окръжност, според следствия 1.1 и 1.2, се получава:

Следствие 3.5. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около окръжност k_2 , диаметърът на окръжността ε_2 лежи върху централата на k_1 и k_2 (Фиг. 6).

От следствия 3.3, 3.4 и 3.5 получаваме:

Следствие 3.6. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k_1 и описан около окръжност k_2 , то окръжността ε_0 се допира до окръжностите ε_1 и ε_2 (Фиг. 6).

Заклучение. Ще отбележим, че отбелязаните геометрични места са разнообразни по вид – точка, права и три окръжности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. БЕРЖЕ. Геометрия. Том второй. Москва, Мир, 1984.
- [2] В. ПРАСОЛОВ. Задачи по планиметрии. Часть II. Москва, Наука, 1986.
- [3] И. ШАРЫГИН. Задачи по геометрии. Планиметрия. Москва, Наука, 1986.
- [4] С. ГРОЗДЕВ, В. НЕНКОВ. Теорема на Понселе за четириъгълниците. *Математика и информатика* (2012), бр. 6.
- [5] В. НЕНКОВ. Парабола, вписана в триъгълник. *Математика и информатика*, (1999), бр. 4, 61–65.
- [6] В. НЕНКОВ. Множество на центровете на вписаните в четириъгълник конични сечения. *Математика и информатика*, (2010), бр. 4, 24–30.
- [7] С. ГРОЗДЕВ, В. НЕНКОВ. Ортоцентър на вписан четириъгълник. *Математика плюс*, (2011), бр. 4, 63–69.

Сава Гроздев
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков
Технически колеж – Ловеч
ул. Съйко Съев № 31
5500 Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

LOCI THAT ARE GENERATED IN THE DISPLACEMENT OF INSCRIBED QUADRILATERAL

Sava Grozdev, Veselin Nenkov

If a quadrilateral is simultaneously inscribed and circumscribed with respect to conics k_1 and k_2 respectively, then according to a well-known theorem of Poncelet it can move remaining inscribed and circumscribed with respect to the same conics. During the displacement various remarkable points of the quadrilateral describe some loci, which are considered in the present paper in case k_1 is a circle.