

ОТ КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА КЪМ ГЕОМЕТРИЧНИ ТРАНСФОРМАЦИИ В РАВНИНАТА*

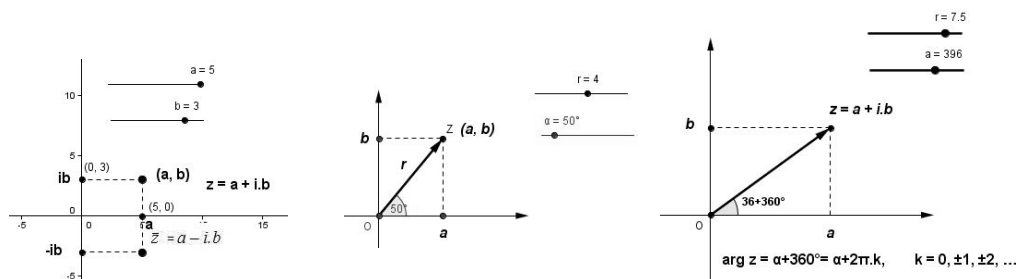
Георги Димков, Десислава Димкова

Статията е продължение на вече създадена разработка за преподаване на материала за комплексни числа в средния курс с помощта на динамичен софтуер. Получените основни знания и умения дават възможност за описване на основните геометрични трансформации в равнината по един нов начин. Важно помощно средство при практическото изложение е динамичният софтуер.

Въведение. В учебната програма по математика на средните училища в България е включена темата „Комплексни числа“. След дефиницията на тези нови обекти се дава тяхното геометрично представяне и аритметичните операции в декартови и полярни координати. Накрая се извежда формулата на Моавър при цял и дробен степенен показател.

Динамичните софтуери дават възможност за изучаване на този материал с участие на учениците, което спомага за неговото по-пълно излагане и разбиране [1].

След определението за комплексно число даваме връзката с точките и векторите в равнина със зададени Декартова или полярна координатна система (Фиг. 1).



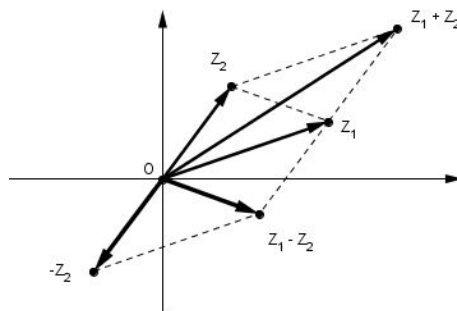
Фиг. 1

Продължаваме с векторна илюстрация на действията събиране и изваждане (Фиг. 2).

Следващата стъпка е „динамично“ показване на умножение и деление, вече в тригонометричен вид на числата (Фиг. 3)

Предвидените приложения и упражнения не дават достатъчно основание за въвеждането на това разширение на понятието „число“. Времето, което се отделя за

* **Ключови думи:** комплексни числа, трансформации в равнината.



Фиг. 2

преподаване на материала, не дава възможност на преподавателите да стигнат по-дълбоко в неговото проучване.

Към геометричните трансформации. Предложеният урок може да се използва при извънкласна работа с ученици, които показват особен интерес към математиката. Използването на динамичен софтуер е от съществено значение.

В началото даваме определение на понятието „функция на комплексна променлива“, като наблягаме на това, че и независимата променлива, и стойността на функцията са комплексни числа [2]. Взимаме за пример най-простата, а именно линейната функция

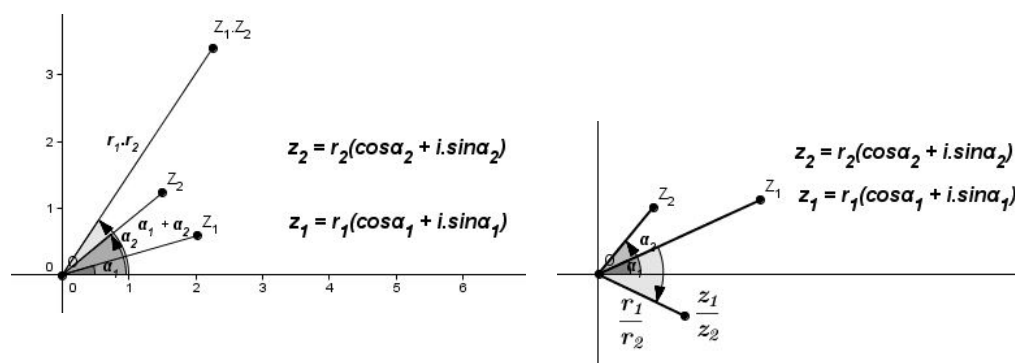
$$f(z) = a \cdot z + b,$$

където $a \neq 0$ и b са две произволни комплексни числа.

Знаем, че в реалния случай графиката на линейната функция е права. Това е нейният геометричен смисъл. Какво можем да кажем за геометричния смисъл на комплексна линейна функция? Преди всичко нека да напишем функцията във вида:

$$w = a \cdot z + b.$$

Виждаме, че трябва да бъдат извършени две аритметични операции: умножение и събиране, които определят връзката между двете комплексни числа z и w .



Фиг. 3

Сега си спомняме връзката между комплексните числа и точките в равнината с техните декартови координати, както и с векторите. Можем да построим две точки в равнината – z и w – и да изследваме поведението на втората точка, когато първата си променя положението. Означаваме с z и w както двете комплексни числа, така и съответните им точки в равнината.

Правим изследване в три стъпки, в зависимост от специални стойности на коефициентите $a \neq 0$ и b .

1. Нека $a = 1$ и $b \neq 0$ е фиксирано комплексно число. Функцията има вида

$$w = z + b.$$

Избираме произволно комплексно число z_1 и работим с два вектора: и двата с начална точка началото на координатната система и край в точките, съответстващи на комплексните числа b и z_1 .

Построяваме сумата на двата вектора по правилото на успоредника. Крайната точка на новия вектор съответства на комплексното число $z_1 + b$. Имаме възможност да движим z_1 в равнината и да наблюдаваме какво се случва (Фиг. 4).

Избираме друго произволно комплексно число $z_2 \neq z_1$ и по същия начин построяваме точката $z_2 + b$. В заключение изследваме двете отсечки: $z_1 z_2$ и $(z_1 + b)(z_2 + b)$ и доказваме, че те са успоредни и с еднаква дължина.

Заклучение 1. На функцията $w = z + b$ съответства трансформацията *транслация* в равнината.

2. Нека $a \neq 0$ е реално число и $b = 0$. Функцията има вида

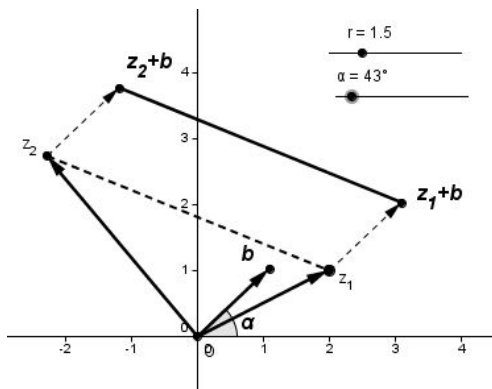
$$w = a.z.$$

Първо да си спомним как се изразява произведението на две комплексни числа в полярни координати.

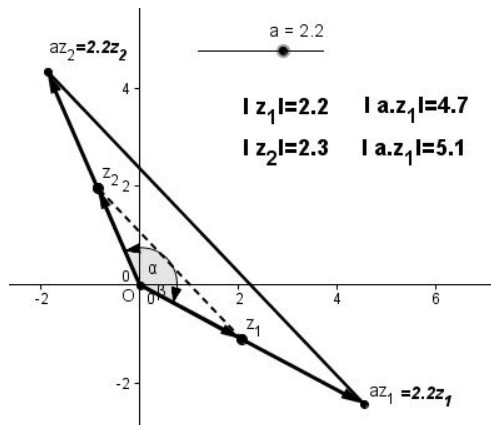
След това определяме $\arg a$ и заключаваме, че трябва да разгледаме два случая: $a > 0$ и $a < 0$.

Нека $a > 0$, т.е. $\arg a = 0^\circ$ (или всяко произволно кратно на 360°).

Избираме произволно комплексно число $z_1 \neq 0$ и построяваме съответния му



Фиг. 4



Фиг. 5

вектор в равнината. Какво можем да кажем за числото $a.z_1$ и съответния му вектор? От правилото за умножаване на комплексни числа в тригонометричен вид получаваме

$$\arg a.z_1 = \arg a + \arg z_1 = 0^\circ + \arg z_1 = \arg z_1.$$

Това означава, че векторът, съответстващ на числото $a.z_1$, е еднопосочен с вектора на числото z_1 и има дължина $|a.z_1|$ (Фиг. 5).

Повтаряме операцията с още едно комплексно число $z_2 \neq z_1, z_2 \neq 0$. Както по-рано разглеждаме двете отсечки $z_1 z_2$ и $(az_1)(az_2)$.

Заклучение 2⁺. На функцията $w = a.z$, $a > 0$ съответства трансформацията **хомотетия с положителен коефициент**.

Нека $a < 0$, т.е. $\arg a = 180^\circ$ (или нечетно кратно на 180°). В такъв случай

$$\arg a.z_1 = \arg a + \arg z_1 = \arg z_1 + 180^\circ.$$

Векторът, съответстващ на $a.z_1$ е противоположен по посока на вектора на числото z_1 и има дължина $|a.z_1|$ (Фиг. 6).

Заклучение 2⁻. На функцията $w = a.z$, $a < 0$ съответства трансформацията **хомотетия с отрицателен коефициент**.

3. Нека $|a| = 1$, $\arg a = \alpha$ и $b = 0$.

Представяме $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Следователно

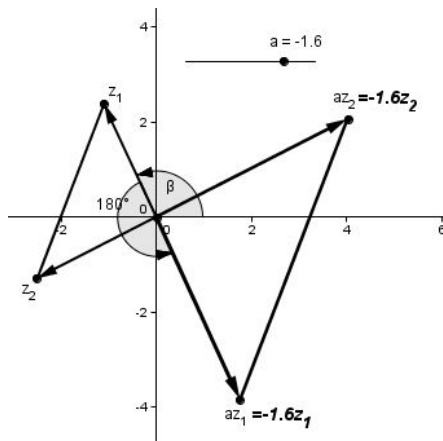
$$w = a.z = (\cos \alpha + i \sin \alpha).z.$$

Както и по-рано, избираме произволно комплексно число $z_1 \neq 0$. Построяваме точката $a.z_1 = (\cos \alpha + i \sin \alpha).z_1$ и изследваме позицията ѝ по отношение на позицията на z_1 (Фиг. 7).

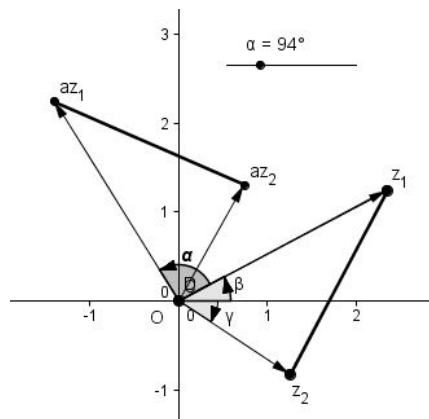
Заклучение 3. На функцията $w = a.z = (\cos \alpha + i \sin \alpha).z$ съответства **ротация с център началото на координатната система и ъгъл α** .

Тези три резултата дават основание да се направи следното

Общо заключение. Функцията $f(z) = a.z + b$, $a \neq 0$ с произволни комплексни коефициенти, се представя с геометричните трансформации **транслация**, **хо-**



Фиг. 6



Фиг. 7

мотетия и ротация с център началото на координатната система, поотделно или в комбинация.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Димков, Д. Димкова. Комплексни числа и геометрични преобразувания в комплексна област. http://www.math.bas.bg/omi/docs/Complex_BG/Complex1.html, 03.02.2013.
- [2] А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, Москва, 1967.

Георги Димков
Десислава Димкова
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София
e-mail: gdimkov@math.bas.bg
ddimkova@gmail.com

FROM THE COMPLEX NUMBERS TOWARDS THE GEOMETRIC TRANSFORMATIONS IN THE PLANE

Georgi Dimkov, Dessislava Dimkova

The paper is a continuation of an earlier approach to teaching the topic *Complex numbers* in secondary schools by means of dynamic geometry software. The acquired knowledge and skills give the possibility the main geometric transformations in the plane to be shown in a new way. Dynamic geometry software plays an important role in the teaching process.