МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013

ПРИЛОЖЕНИЕ НА MATLAB, MUPAD, MAPLE И LPSOLVE В ОБУЧЕНИЕТО ПО ЛИНЕЙНО ОПТИМИРАНЕ

Стоян Капралов, Павлина Стефанова

Статията представя практически опит в преподаването на линейни оптимизационни модели в семинарни упражнения по Приложна математика за студенти от икономически специалности на Технически университет – Габрово и предлага нови подходи за по-ефективно обучение чрез използване на системи за компютърна математика.

Въведение. В Технически университет – Габрово в курса по Приложна математика се изучава модул „Въведение в линейното програмиране. Симплекс метод“. Модулът започва с решаване на системи линейни неравенства и с графично решаване на двумерната задача на линейното оптимиране. При разглеждането на симплекс-метода се решават задачи с малко на брой променливи или задачи, при които се достига до оптимално решение най-много с 2–3 симплекс-таблици. Преобразуванията се правят по метода на Гаус-Жордан, който студентите са прилагали и при решаването на системи линейни уравнения.

За по-добра подготовка на бъдещите икономисти в края на модула се решават и по-сложни задачи с повече променливи, за които традиционното решение е трудоемко. Така възниква необходимост от използване на подходяща система за компютърна математика.

В статията се представят решения на конкретна задача по традиционния метод („на ръка“), както и с помощта на системите Matlab, MuPAD (като отделна част на Matlab), Maple и LPSolve. Сравнява се синтаксисът на различните програми за въвеждане на данните и извеждането на решението. Анализирани са някои предимства и недостатъци на разглежданите системи от методическа гледна точка за по-лесно възприемане и изпълнение от студентите.

Задача. Да се намери минимумът на целевата функция $Z = -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 4x_5$ при следните условия:

$$\left| \begin{array}{l} x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \qquad \text{ако} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 16 \end{array} \right.$$

Традиционно решение. Поставената задача е в каноничен вид, поради което съставяме начална симплекс-таблица [2].

Пресмятаме първоначалната стойност на функцията $Z_1 = 5.3 + 4.9 + (-1).16 = 35$ и оценките на небазисните неизвестни $D_3 = 5.0 + 4.1 + (-1).3 - (-2) = 3 > 0$,

Таблица 1 минимум Z			-1	5	-2	2	4	
ЦБ	**БН**	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	x_2	3	0	1	0	**1**	0	$.(-2)$
4	x_5	9	0	0	1	2	1	
-1	x_1	16	1	0	3	2	0	
D_j		$Z_1 = 35$	0	0	3	9	0	

$D_4 = 5.0 + 4.2 + (-1).2 - 2 = 9 > 0$. И двете оценки са положителни, т. е. неблагоприятни, което означава, че полученото решение $X_1 = (16, 3, 0, 0, 9)$ не е оптимално.

Определяме смяната:

– разрешаващ е стълбът на променливата x_4, тъй като отговаря на най-голямата положителна оценка $D_4 = 9$;

– разрешаващ е първи ред, защото отговаря на минималното частно $\theta_{\min} = \min\left[\dfrac{3}{1}, \dfrac{9}{2}, \dfrac{16}{2}\right] = \dfrac{3}{1}$;

– разрешаващ елемент (пивот) е елементът $a_{14} = 1$.

Извършваме смяната в таблица 2:

Базис: x_2 излиза от базиса и на негово място влиза x_4.

– Първи ред се умножава по (-2) и се прибавя последователно към втори и трети ред;

– Първи ред се умножава по (-9) и се прибавя към реда с индексните оценки.

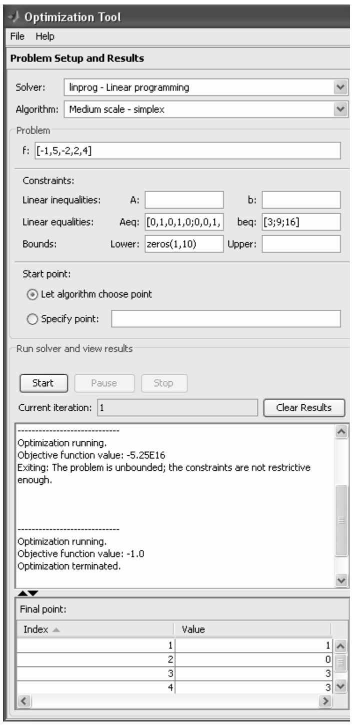
Таблица 2 минимум Z			-1	5	-2	2	4
ЦБ	**БН**	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_4	3	0	1	0	1	0
4	x_5	3	0	-2	**1**	0	1
-1	x_1	10	1	-2	3	0	0
$\boldsymbol{D_j}$		$\boldsymbol{Z_2 = 8}$	**0**	**–9**	**3**	**0**	**0**

Пресмятаме $Z_2 = 8$ за $X_2 = (10, 0, 0, 3, 3)$, което също не е оптимално, тъй като $D_3 = 3 > 0$.

Аналогично извършваме смяната в таблица 3:

Таблица 3 минимум Z			-1	5	-2	2	4
ЦБ	**БН**	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_4	3	0	1	0	1	0
-2	x_3	3	0	-2	1	0	1
-1	x_1	1	1	4	0	0	-3
$\boldsymbol{D_j}$		$\boldsymbol{Z_3 = -1}$	**0**	**–3**	**0**	**0**	**–3**

Полученото решение $X_3 = (1, 0, 3, 3, 0)$, на което отговаря $Z_3 = -1$, е оптимално, тъй като всички оценки са неположителни, с което задачата е решена.



Решение на Matlab. В командния прозорец на MATLAB [1] се стартира >>**optimtool**. Отваря се диалоговият прозорец Optimization Tool, лявата част от който е показана на фигурата. От падащия списък на полето Solver се избира процедурата linprog – Linear programming, в полето Algorithm се избира Medium scale-simplex. Процедурата linprog решава само задачи за минимум. След Problem се въвеждат данните на задачата:

f: [-1, 5, -2, 2, 4]

Aeq: [0, 1, 0, 1, 0; 0, 0, 1, 2, 1; 1, 0, 3, 2, 0]

beq: [3; 9; 16]

В полето *f* се задават коефициентите на целевата функция Z, като се отделят със запетайка и заграждат в средни скоби. В полето *Aeq* се изброяват коефициентите на матрицата от ограничителните условия, разделени със запетая, а отделните редове – с точка и запетая. В полето **beq** се въвеждат свободните членове от ограничителните условия. В полето **lower** за долна граница за променливите се задава zeros(1,10).

Ако в ограниченията има неравенства, се задават в полетата A и b. В разглежданата задача няма неравенства и затова тези полета не се попълват.

След стартиране на процеса с бутона Start, се получава оптималното решение – objective function value: **–1.0.**

Предимства:

1) MATLAB е мощна програма, която разполага с много вградени функции за решаване на различни класове оптимизационни задачи и това позволява една задача да се реши с различни методи.

Недостатъци:

1) В задачи за максимум целевата функция се умножава с (-1);

2) В даден момент се виждат само част от коефициентите в полетата *Aeq* и A, което може да се преодолее чрез въвеждане на данните директно в командния прозорец.

Решение на Mupad. От септември 2008 г. MuPAD е вграден в пакета Symbolic Math Toolbox на MATLAB и от тогава престава да съществува като самостоятелен продукт [4]. Стартира се от командния прозорец на MATLAB, където се пише >>mupad. Отваря се нова работна тетрадка (Notbook 1), в която се въвежда следното:

c:=[{x2+x4=3, x3+2*x4+x5=9, x1+3*x3+2*x4=16},
-x1+5*x2-2*x3+2*x4+4*x5, {x1,x2,x3,x4,x5}]:linopt::minimize(c)

На променливата се присвояват трите ограничителни условия, разделени със запетая и заградени с фигурни скоби, след което се задава целевата функция и накрая се изброяват променливите. След стартиране на **linopt::minimize(c)** се извежда резултатът:

```
[OPTIMAL, {x1 = 1, x2 =0, x3 = 3, x4 = 3, x5 = 0}, -1]
```

Предимства:

1) с Mupad по-лесно се въвеждат данните, тъй като позволява копиране и редактиране;

2) решението се дава в по-компактен и разбираем за студентите вид.

Решение на Maple.

$> \ with(simplex):$

$cnsts := \{x2 + x4 = 3, \ x3 + 2 \cdot x4 + x5 = 9, \ x1 + 3 \cdot x3 + 2 \cdot x4 = 16\}$

$> obj := -x1 + 5 \cdot x2 - 2 \cdot x3 + 2 \cdot x4 + 4 \cdot x5:$

$> minimize(obj, cnsts, NONNEGATIVE)$

$$\{x1 = 1, x2 = 0, x3 = 3, x4 = 3, x5 = 0\}$$

Предимства:

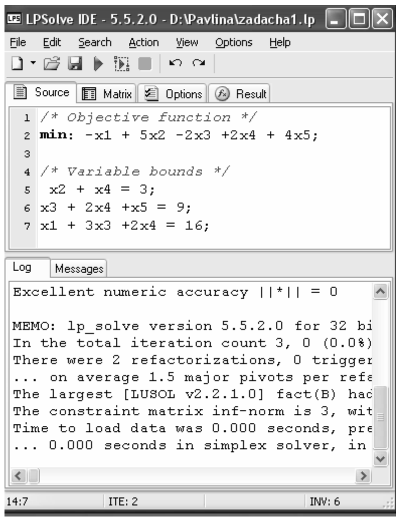
1) В Maple въвеждането на данните е подобно на Mupad, но малко по-дълго. Позволява копиране и редактиране.

Недостатъци:

1) Задължително се задава типа на променливите, който в случая е NONNEGATIVE.

2) Като резултат не се извежда стойността на целевата функция, а само оптималните стойности на променливите.

Решение на LPSolve. Програмата LPSolve [3] има лесен графичен интерфейс под Windows за решаване на задачи от линейното оптимиране.



След стартиране на програмата се избира бутона Source.

След /* Objective function */ се въвежда целевата функция

min: $-x1$ + $5x2$ $-2x3$ $+2x4$ + $4x5$;

След /* Variable bounds */ се въвеждат ограничителните условия на отделни редове:

$x2 + x4 = 3$;

$x3 + 2x4 + x5 = 9$;

$x1 + 3x3 + 2x4 = 16$.

Променливите се приемат за положителни и не е нужно да се въвеждат специалните ограничения за тях. Натискаме бутона F9 или щракваме на зелената стрелка (Solve) на лентата с инструменти за пресмятане на задачата. Резултатът се вижда при избиране на прозореца Result.

Предимства:

1) Програмата е малка по обем и достъпна за потребителя;

2) Позволява конвертиране на данни в rtf, LaTex и html формат;

3) Има удобен за ползване редактор, който позволява копиране на данни от друга програма;

4) Извършва синтактична проверка на модела;

Недостатъци:

1) Може да се решават само един клас оптимизационни задачи.

Заключение. При съвременното развитие на технологиите е необходимо освен с традиционно решение на задача по линейно оптимиране, студентите да се запознаят и с възможностите на поне една система за компютърна математика. Коя точно програма да се използва зависи най-вече от технологичните възможности, знанията и предпочитанията на преподавателя, както и от учебния план.

При анализ на възможностите на четирите програми за решаване на подходящи за студентите на ТУ – Габрово оптимизационни задачи, най-лесни за използване в учебния процес са LPSolve и MuPad, следвани от Maple и Matlab.

Посочените предимства и недостатъци на програмите са от методическа гледна точка за по-разбираемо и достъпно обучение на студенти и не бива да се абсолютизират.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Караколева. Ефективно обучение по оптимизационни методи чрез моделиране и решаване с Matlab на практически задачи. *Математика и математическо образование*, **40** (2011), 406–412.

[2] Ат. Аврамов, Ст. Грозев. Математика (с приложения в икономиката и бизнеса), АИ „Ценов“, Свищов, 2009.

[3] H. Gourvest, W. Patton, P. Notebaert. LPSolve IDE – 5.5.2.0

[4] Й. Тончев. MuPAD – новият символен мотор на MATLAB, Издателство „Техника“, София, 2011.

Стоян Капралов
Павлина Стефанова
Катедра Математика
Технически университет – Габрово
ул. Хаджи Димитър № 4
5300 Габрово
e-mail: s.kapralov@gmail.com
pavlinarachevabg@yahoo.com

APPLICATION OF MATLAB, MUPAD, MAPLE AND LPSOLVE IN TEACHING LINEAR PROGRAMMING

Stoyan Kapralov, Pavlina Stefanova

A practical experience in teaching linear programming models for students of the Technical University – Gabrovo is presented and a new approach for effective learning using computer algebra systems is proposed.