

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
*Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013*

**СЪПЪТСТВАЩО ОБУЧЕНИЕ НА ТУРНИРА
„ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“**

Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов

Разглежда се въпросът за перманентна подготовка на ученици, показали високи резултати в Есенния математически турнир *Черноризец Храбър*. Представени са три типа дейности, реализирани през 2012 г. по време на няколко инициативи, организирани под научно-методическото наблюдение на екипа, организиращ споменатия турнир.

Турнирът *Черноризец Храбър* – изследователска лаборатория. За своето 20-годишно съществуване турнирът *Черноризец Храбър* се утвърди като изследователска лаборатория за дидактически нововъведения. В тематиката му систематично се появяват тестови задачи в псевдокод, лингвистика, застъпват се елементи, отнасяни към университетските курсове по математика, възкръсват от миналото задачи с много данни, включват се още нетипични задачи за състезание с избираем отговор [1, 2, 3]. При това начинът на поднасяне за повечето нововъведения (доколкото ни е известно) няма аналог в световната практика. За пълноценното анализиране на ефекта от такава новаторска мисия обикновената статистическа обработка е крайно недостатъчен инструментариум. В търсене на по-надеждна обратна връзка, екипът, осигуряващ Турнира в дидактически план, се ориентира към провеждане на мероприятия, позволяващи по-мощни непосредствени контакти с най-изявени участници в турнира. Така се стигна до идеята за организирането на няколко инициативи през 2012 г. във времето между двадесетото и двадесет и първото издание на Турнира, за които ще стане дума в настоящата статия. Това бяха Майсторски клас в гр. Сандански, 3–8 януари, Лятна школа в Слънчев бряг, 11–16 юли и Есенен семинар в Банско, 5–10 септември. Членове на екипа участваха и в научно-методическото осигуряване на Синьо еко-училище в с. Лозенец, 26 юни–11 юли.

В търсене на синтез между учене и забавления. Споменатите инициативи бяха ориентирани към ученици от 4. до 8. клас (в Майсторския клас учениците бяха от 5. до 7. клас), където считаме, че е най-важно да се даде ориентация на децата с изявен интерес към математиката за начина, по който е добре да протича развитието им в това направление. Целта ни бе да предложим на участниците съдържателна математическа подготовка, да им осигурим платформа за индивидуална изява и да получим информация за това, как те възприемат една или друга идея, която разработваме в състезателните теми на Турнира.

За постигане на максимални резултати при преследването на поставената цел се спряхме на три типа дейности, които разработихме в няколко формата:

* класически лекционни курсове по методи за решаване на задачи с достатъчно много материал за самостоятелна работа;

* теоретични занимания с възможност за докладване на разработките на обособен форум;

* състезателни дидактически игри, където забавната форма активно засилваше образователния ефект.

В следващите редове ще дадем повече детайли за трите формата.

Какви теми бяха разглеждани с участниците в проведените обучения.

При избор на теми ние се ръководехме от няколко възлови съображения. На първо място, темите трябваше да са полезни при подготовката на учениците за следващите издания на Турнира. Това означаваше да се опрем на вече давани задачи, при това в поредица издания, като някои идеи, разработвани в турнирните теми за по-високите класове, бяха адаптирани за съответната възрастова група.

Второ съображение беше подготовката да бъде полезна на кандидатстващите след 7. клас. Така в тематиката се появиха задачи, близки по характер до тестовите от програмата PISA и TIMSS. В редовните училищни занимания няма възможност за подготовка на учениците върху този вид задачи, поради което невинаги децата имат нагласата за решаването им.

Трето, но не по-малко важно съображение при разработване на тематичния план, беше да представим на учениците състезателната тематика в систематизиран формат, понеже напоследък на книжния пазар тематично структурирани издания не се появяват. При това необходимите първоначални знания за пълноценно включване на участниците по време на лекциите не трябваше да надхвърлят изучавания материал по математика в средния курс. Така лекциите станаха достъпни за голямата част от участниците в смесените групи, включващи ученици от различни класове.

Една тема беше разработвана в два учебни часа. Поради ограниченото време и желанието ни да запознаем учениците с повече ситуации наложихме твърде високо темпо. За да проверим доколко материалът е усвоен, предлагаме на участниците задачи за самоподготовка в следобедните часове по темата на съответната лекция. Те като правило проявяваха старание и ентузиазъм в писането на „домашното“ (в случая – „хотелното“). Много ни впечатли, че голямата част от учениците вечер предпочитаха самостоятелната работа по задачите пред дискотеките. Ще подчертаем огромната трудоемкост на избрания от нас стил на работа - например на Майсторския клас се наложи да проверяваме около 7000 задачи.

Ще дадем няколко примера как беше реализирана планираната лекционна програма.

1) Тема *Задачи, които се решават с помощта на таблици или чертежи.*

В много и разнообразни задачи беше показана ползата от разполагането на данните в таблици, около окръжност, върху числовата ос, в кръгове на Ойлер и т.п. В началото учениците се затрудняваха в избора на типа онагледяване. След въвеждащите примери, обаче, те се ориентираха достатъчно бързо. Например, благодарение на чертеж с окръжност и стрелки, повечето от тях без проблеми се справиха със следната задача.

В един голям парк има каменни статуи, наредени една до друга в кръг. Явор и Юри започнали да ги броят, като се движили в една и съща посока, но започвайки

от различни статуи. Затова №20 за Явор била №5 за Юри и №64 за Юри била №7 за Явор. Колко са били статуите?

В края на занятиято активността на учениците значително се повиши. Те вече самостоятелно структурираха и онагледяваха данните, въвеждаха символи и неизвестни, чувстваха увереност в прилагането на изучените техники.

2) Тема Таблицы с числа.

Задачите в тази тема бяха за подреждане на числа в таблици при различни ситуации. За голяма част от учениците беше новост работата с два индекса, използването на формулата за сбор на първите n естествени числа, за да се открие мястото на дадено число в таблицата, съпоставянето на две таблици, прилагането на геометрични и комбинаторни съображения в таблици с числа. За илюстрация даваме следната задача, предизвикала оживено обсъждане [4].

Фермер има 100 прасета и 100 пилета. Той има 4 дворни места, всяко с формата на квадрат, разположени в квадрат 2×2 . Фермерът иска да разпредели животните в четирите дворни места така, че в първия ред да има 120 глави, на втория ред – 300 крака, на първата колона – 100 глави и на втората колона – 320 крака. По колко различни начина може да се направи това?

В задачата се въвеждат неизвестни, ползват се отделни таблици за броя на главите и за броя на краката. С насочващи въпроси учениците достигнаха до идеята за съпоставянето на таблиците. Те трябваше да преодолеят известни трудности при установяване на ограниченията за въведените неизвестни, но накрая съобразиха броя на вариантите за подреждането на животните в дворните места.

3) Тема Кодове.

С поредица от постепенно усложняващи се задачи учениците бяха запознати с методите за броене на думите с даден набор от букви (със или без фиксиране на броя им). По този начин те получиха общ метод за разсъждение в задачите за броене на комбинации и вариации (със и без повторения), пътища в решетка и преброяване на числа с определени свойства [5]. При по-големите ученици методът беше приложен и за доказване на комбинаторни твърдения, например твърдеството

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) + 3 \cdot (n - 2) + \dots + n \cdot 1 = \binom{n+2}{3}$$

посредством преброяването по два начина на думите с 3 букви А и $n - 1$ букви Б. Част от учениците схванаха бързо идеята на метода и започнаха творчески да го прилагат в разнообразни други ситуации. За илюстрация, те успяха да обобщят даденото по-горе комбинаторно твърдение за думи с $i + 1 + j$ букви А, получавайки

$$\binom{i}{i} \binom{j+n-1}{j} + \binom{i+1}{i} \binom{j+n-2}{j} + \binom{i+2}{i} \binom{j+n-3}{j} + \dots + \binom{i+n-1}{i} \binom{j}{j} = \binom{n+i+j}{i+j+1}.$$

Що за теоретични форми бяха проведени с учениците. Целевата група, включваща изявени ученици по математика, позволяваше изнасянето на определен тип обучение във форми с подчертано самостоятелни занимания в малки групи и/или индивидуално. Разбира се, самостоятелната работа беше следена отблизо и учениците имаха възможност да се консултират с членовете на екипа. Ще приведем два примера, които дават представа за тази част от програмата на обучението.

Колоквиум върху аксиоматичния подход се проведе в рамките на Майсторския клас в гр. Сандански. Учениците получиха дидактическа разработка с няколко аксиоматични системи, където имаше твърдения с подробно дадени доказателства, но

също теореми и леми с кратки упътвания или съвсем без помощни указания. Приведен бе пример за взаимно противоречива аксиоматика. Разгледани бяха и модели, реализиращи непротиворечивите аксиоматични системи. От участниците в колоквиума се очакваше да представят своите обосновки, доказателства и коментари върху отделни части от темата пред колегите си. Докладващите трябваше да отговарят и на въпроси, да се аргументират по едно или друго свое становище. Активните ученици бяха както от 7. клас, за които най-вече беше предназначена дидактическата разработка, така и шестокласници, които не се бяха занимавали систематично с такава материя. Приятна изненада бе успешното създаване на модел на аксиоматична система от учениците, при това в реално време – по време на дискусиите.

Ученическа *научна сесия* беше организирана на Есенния математически семинар в Банско. В сесията бяха докладвани материали, подготвени предварително от учениците преди семинара, както и такива, които се „родиха“ по време на семинара. Към втория тип се причислява системата задачи за суми от произведения на последователни естествени числа, представена от участничка в семинара. Темата *Математическа индукция*, разгледана на лекции, включваше няколко задачи от този тип. Тези задачи бяха в основата на материал, в който индукцията играеше обичайната си роля на апарат за доказателство, но индуктивни съображения имаха и евристична роля при формулировката на обобщения на разгледаните вече задачи.

Специфики на състезателните дидактически игри, които бяха организирани. Децата обичат да играят и се включват с огромно удоволствие и ентузиазъм в състезанията, представени в игрова форма. Една от най-атрактивните игри се оказва *Математическата рулетка*: след провеждането ѝ първата вечер на съответния лагер като правило учениците се молеха всяка вечер да правим именно това. Рулетката е отборно състезание (оптималният брой участници в отбор се оказва 5-6, но играта може да се провежда и с по-големи отбори). Основната идея е, че всеки отбор разполага с определен капитал (в началото по 100 точки). На екран се прожектира задача. Отборите трябва да посочат отговор (цяло число) и да определят каква част от капитала си залагат за верността на отговора (цяло неотрицателно число, ненадхвърлящо половината от текущия капитал на отбора, освен в случая, когато този капитал е 1 точка; тогава тя може да се заложат). Когато отборът е готов, капитанът му предава тайно тези данни на квестора. Засича се 1 минута от момента, когато два отбора са предали бланките си (по този начин продължителността автоматично се адаптира към трудността на прожектираната задача и същевременно се обезсърчават опитите за тактически маневри на нематематическа основа). След това на екрана се прожектира таблото със залаганията, на което се виждат отговорите и залозите на всички предали отбори. Нанася се верният отговор (което е емоционалната кулминация), като автоматично капиталите на позналите отбори се увеличават със стойността на залога, а останалите залози се губят. После се преминава към следващата задача. В отделни случаи две или три по-леки задачи биваха комбинирани в общ блиц-въпрос, при който от отбора се очакваше сборът от отговорите на всички прожектирани задачи. Тук допълнително проличаваше умението за ефективно разпределение на отборната работа. Освен умението за решаване на задачи се тренират способностите за разумна преценка за поемане на риск и умението да запазиш самообладание и хладнокръвие в критични ситуации или след сериозна

загуба. Обикновено при повторните реализации на рулетката в рамките на един и същи лагер се забелязва много по-разумно поведение на отборите и управление на капитала.



По време на *Математическата рулетка* всички са в еуфория.

Друга игрова форма, станала вече класическа, е *Математическата търсачка*. Тя е направена по подобие на *Математическото ориентиране* от летните лагери на Европейското Кенгуру, но адаптирана към по-ограничения брой ръководители тук и към необходимостта понякога тя да се провежда при зимни условия, без да се излагат децата на опасност от настинка (при ентусиазма и жертвоготовността им в името на отбора е абсурдно да очакваме в такъв момент да мислят за здравето си). Основната идея е да се крият (най-добре из близък парк) не самите задачи, а талони, които да могат по-късно да се „изтъргуват“ за задачи от капитаните на отборите. По този начин се разделя фазата от търсенето (в парка) от фазата на решаването (което в зимни условия е на закрито), както и се изключва рискът да останат неизползвани задачи (което би било жалко). Тази игра тренира и уменията за работа в екип заради необходимостта от ефективно разпределение на силите на отбора. Тя дава възможност за изява на всички участници: дори и по-малките усещат своята отговорност и дават приноса си за успеха на отбора. Дидактическите състезателни игри имаха силен мотивиращ ефект за по-задълбочено вникване в темите от лекционната програма и теоретичните форми. Задачи, близки до разглежданите на лекциите и/или давани за самоподготовка, бяха често срещани в състезателните игри. Така учениците усещаха по-непосредствено ползата от писането на „домашните“.

Заклучителни бележки. По достигналата до нас информация от родители и впечатленията, които добихме от непосредствената работа с учениците, може да обобщим, че проведените инициативи са добре посрещнати и от двете страни. За нас

натрупаният опит е също от голямо значение – ползвайки клише: сверихме си часовниците. Стилът, който бе водещ в работата ни, може да се определи като синтетичен, включващ както инструкционни форми, така и адаптиран сократов метод.

Разнообразният дидактически инструментариум, който използвахме, се основаваше на единен методически подход. Така може да говорим за интегрален подход в рамките на обучението на изявени ученици. Реализиран беше образователен цикъл, включващ организация и провеждане на математически турнир, откриване на изявени ученици и непосредствена работа с тях, подготовка на дидактически материали, индивидуализация на образователния процес, предполагаща навлизане на учениците в следващ цикъл с по-висока състезателна компетентност.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. ТАБОВ, Б. ЛАЗАРОВ. Есенен математически турнир „Черноризец Храбър“ 1992–2001. ВТУ „Тодор Каблешков“, София, 2001.
- [2] Б. ЛАЗАРОВ, И. КОРТЕЗОВ. Есенен математически турнир „Черноризец Храбър“ 2002–2006. ВТУ „Тодор Каблешков“, София, 2006.
- [3] Б. ЛАЗАРОВ. Идеята за фазово пространство в задачи. Доклад на Националния семинар „Математическото образование в Европейската година за творчество и иновации“, ИМИ, 22–23.12.2009 г.
- [4] И. ШАРКОВА. От Корея’2010 – само със златни медали. *Математика+*, бр. 1 (2011), с. 37.
- [5] Б. ЛАЗАРОВ, И. КОРТЕЗОВ. Кодове и маршрути. *Математика и информатика*, бр. 2 (2011), 17–21.

Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов

Институт по математика и информатика

Българска академия на науките

ул. Акад. Георги Бончев, бл. 8

1113 София

e-mail: lazarov@math.bas.bg,

sboni@abv.bg,

kortezov@math.bas.bg

CONCOMITANT EDUCATION OF THE CHERNORIZETS HRABAR TOURNAMENT

Borislav Lazarov, Boyanka Savova, Ivaylo Kortezov

The permanent education of advanced students who achieved best results in the *Chernorizetz Hrabar* Tournament is under consideration. Three types of activities that took place in 2011/2012 academic year are presented.

Key words: gifted education, didactic games, integrated approach.