

ПРИЛОЖЕНИЕ НА MAPLE ПРИ РЕШАВАНЕ НА ПАРАМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

Младен Манев

В статията се разглеждат някои приложения на системата за компютърна алгебра *Maple* в обучението по математика, подходящи за ученици от средния курс.

Въведение. Решаването на параметрични задачи по естествен начин въвежда голям брой евристични методи, ценни за развитието на ума и съобразителността на учениците. В същото време на уравненията и неравенствата с параметри в училище се отделя много малко внимание. Една от основните причини за това е, че тези задачи са твърде абстрактни и за голяма част от учениците те са недостъпни. При разглеждането на такива теми за учителите е трудно да реализират основни дидактически принципи като съзнателност, активност, нагледност и достъпност. С навлизането на системите за компютърна алгебра като *Maple*, *Mathematica*, *MATLAB* и др. преподавателите по математика вече разполагат с мощни помощници в обучението, които могат да осигурят по-голяма нагледност, както и инструменти за извършване на различни пресмятания, позволяващи по-ясно да се открият различни математически идеи, до които при стандартното обучение трудно се достига поради големия обем на нужните изчисления. В тази статия ще бъдат разгледани примери, които ще демонстрират някои от възможностите на системата за компютърна алгебра *Maple* за решаване на параметрични задачи.

Примери. В *Maple* има реализирани възможности както за извършване на различни пресмятания, така и за изчертаване на графики, за анимиране на ситуации, зависещи от параметър. Всички примери могат да бъдат изпълнени в директен режим. Ще започнем с един класически пример:

Задача 1. Да се построи графиката на функцията $f_1(x) = |x|$. Да се проследи изменението на графиките на функциите $f_2(x) = |x| + a$, $f_3(x) = |x + a|$ и $f_4(x) = a|x|$ при промяна на реалния параметър a .

Решение. Много от възможностите за изчертаване на графики са свързани с команди, които са включени в пакета *plots* на *Maple*. Един от начините за активиране на този пакет е да се изпълни командата *with(plots)*. Достатъчно е това да бъде направено еднократно в началото, след което командите ще бъдат активни и за следващите примери.

За изчертаване на графиката на $f_1(x) = |x|$ може да се използват следните команди:

$$f_1 := x \rightarrow |x|$$
$$\text{plot}(f_1(x), x = -10..10, y = -10..10)$$

На първия ред е дефинирана функцията $f_1(x) = |x|$, а на следващия ред е командата за нейното изчертаване. Знакът $\rightarrow$ може да се въведе с последователно въвеждане на $-$ и $>$.

За проследяване на изменението на графиката на функцията $f_2(x) = |x| + a$ изпълняваме следните команди:

```
f2 := x -> |x| + a
animate(plot, [f2(x), x = -10..10, y = -10..10], a = -10..10).
```

Програмата първо изчертава графиката на функцията $f_2(x) = |x| + a$ при $a = -10$. След кликуване върху чертежа се активира лентата за анимация, от която може да се управлява нейното изпълнение.

По аналогичен начин може да се проследи изменението на графиките и на другите две функции.

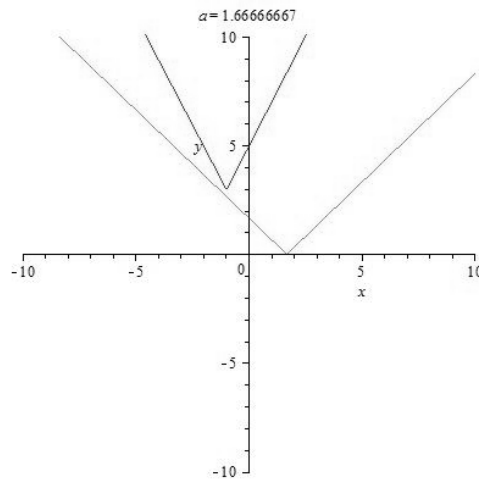
Задача 2 [1]. За кои стойности на реалния параметър a уравнението

$$|x - a| - |2x + 2| = 3$$

има единствено решение?

Решение. Разглеждаме функциите $f(x) = |x - a|$ и $g(x) = |2x + 2| + 3$. Даденото уравнение има единствено решение тогава и само тогава, когато графиките на двете функции имат една обща точка. Кога се случва това? Изпълнението на следващите команди създава анимация, която дава красноречив отговор на този въпрос.

```
f := x -> |x - a|
g := x -> |2 * x + 2| + 3
animate(plot, [{f(x), g(x)}, x = -10..10, y = -10..10], a = -10..10)
```



Вече не е трудно да се съобрази, че ако уравнението има единствено решение, то е $x = -1$. Следователно търсените стойности на a са корените на уравнението $f(-1) = g(-1)$. За решаването му може да се използват и услугите на *Maple*. Достатъчно е да напишем $\text{solve}(f(-1) = g(-1))$, откъдето да установим, че търсените стойности на a са -4 и 2 . Накрая ще отбележим, че за *Maple* не е проблем да реши и директно

задачата. Ако запишем $\text{solve}(|x - a| - |2 \cdot x + 2| = 3, x)$, получаваме пълен отговор за уравнението, откъдето лесно се съобразява кои са интересующите ни стойности на a .

Задача 3 [2]. Колко решения има системата $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ в зависимост от стойностите на параметъра a ?

Решение. Броят на решенията на системата зависи от броя на пресечните точки на графиките на двете уравнения. За всяко от двете уравнения е полезно да се създаде отделен чертеж, за да може учениците по-добре да разберат какво представляват графиките на двете уравнения. Това може да стане с изпълнението на следните команди:

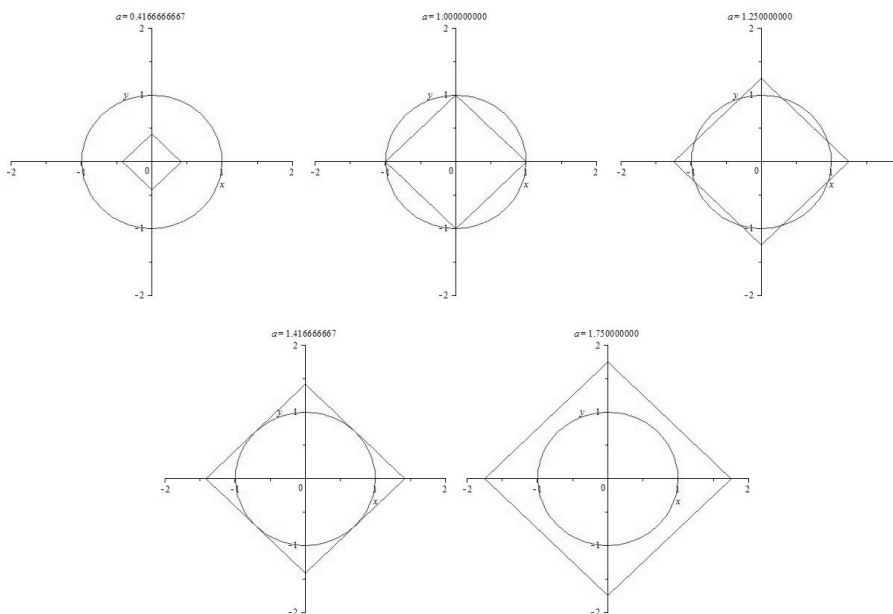
```
smartplot(x2 + y2 = 1)
animate(implicitplot, [|x| + |y| = a, x = -10..10, y = -10..10,
numpoints = 800], a = 0..10).
```

Тук ще отбележим, че се налага използването на опцията $\text{numpoints} = 800$, защото в противен случай квадратът, който е графика на уравнението, се изчертава като осмоъгълник.

Въпреки че не е нужно за решението на задачата, за учениците в този момент би било полезно да видят и как се променя графиката на уравнението $x^2 + y^2 = a$, когато параметърът a описва например интервала $[0, 16]$.

След като вече е ясно как изглеждат графиките на двете уравнения, може да създадем анимация, която да помогне за решаване на задачата:

```
animate(implicitplot, [{|x| + |y| = a, x2 + y2 = 1}, x = -2..2, y = -2..2,
numpoints = 800], a = 0..2)
```



Като използваме геометрични съображения, определяме, че окръжността се допира до квадрата при $a = \sqrt{2}$.

Сега лесно намираме крайния отговор: ако $a < 1$ или $a > \sqrt{2}$, системата няма решение; ако $a = 1$ или $a = \sqrt{2}$, решенията са четири; ако $1 < a < \sqrt{2}$, решенията са осем.

Задача 4 [4]. Да се намери броят на реалните корени на уравнението

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

в зависимост от стойностите на реалния параметър a .

Решение. Да разгледаме функциите $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$ и $g(x) = a$. Броят на решенията на уравнението зависи от броя на пресечните точки на графиките на двете функции. Ще опишем един алгоритъм, който може да реализираме със средствата на *Maple* и който достатъчно ясно дава представа за използваните идеи при решаването на такъв тип задачи.

Дефинираме функцията $f(x) : f := x \rightarrow -3 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2$. За построяването на графиката на $f(x)$ ще използваме по-различни команди, защото с досега използваните средства трудно се получава графика със задоволително качество. Активираме помощника за построяване на графики на полиномиални функции чрез командата `Student[Precalculus][PolynomialTutor]()`. След нейното изпълнение се появява прозорец, в който в полето за дефиниране на полинома записваме $f(x)$. Така освен че виждаме графиката на $f(x)$, програмата генерира и кода на командата, с която може да начертаем графиката:

`plot(-3 * x^4 + 4 * x^3 + 12 * x^2, x = -2.41..3.48, y = -141..47.7, 'numpoints' = 200).`

Така вече имаме необходимите параметри за създаване на анимация, която да помогне за решаването на задачата:

`animate(plot, [{f(x), a}, x = -2.41..3.48, y = -141..47.7], a = -140..40, frames = 100)`

След като разгледаме анимацията, естествено възниква въпросът за намирането на локалните екстремуми на $f(x)$. Определянето на стойностите на x , при които те се получават, може да се реализира с командата `ExtremePoints(f(x))` (преди изпълнението на тази команда чрез `with(Student:-Calculus1)` трябва да се активира съдържащият я пакет на *Maple*). Така получаваме, че локалните екстремуми са три – при $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$, като стойностите на $f(x)$ са съответно 5, 0 и 32. Видът на екстремумите е очевиден от графиката на $f(x)$. Окончателно получаваме, че уравнението няма реални корени при $a > 32$; има един корен при $a = 32$; има два корена при $a \in (-\infty, 0)$ и $a \in (5, 32)$; има три корена при $a = 0$ и $a = 5$; има четири корена при $a \in (0, 5)$.

В края на решението ще отбележим, че *Maple* притежава достатъчно средства за класическо изследване на функцията $f(x)$ (пресмятане на граници на функцията, производни, решаване на уравнения и неравенства), които също е полезно да бъдат коментирани с учениците.

Задача 5 [4]. Да се намери броят на реалните корени на уравнението

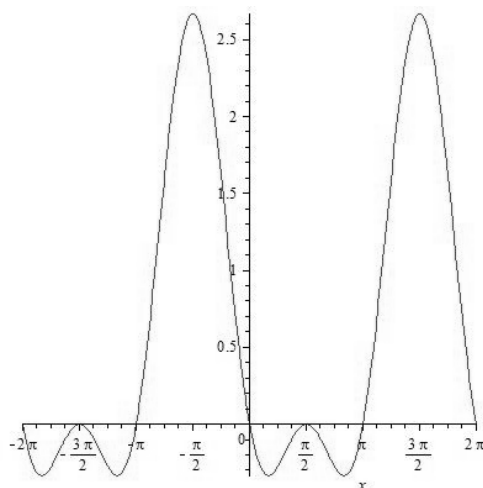
$$x^3 - 3ax + 2 = 0$$

в зависимост от стойностите на реалния параметър a .

Решение. Решението на тази задача идейно наподобява решението на Задача 4. Тук $f(x) = \frac{x^3 + 2}{3x}$, а за изчертаването на нейната графика е добре да се използва помощникът за изчертаване на графики на рационални функции, който може да се активира с командата `Student[Precalculus][RationalFunctionTutor]()`. След извършване на необходимите изследвания се получава, че уравнението има един корен при $a < 1$; два корена при $a = 1$; три корена при $a > 1$.

Задача 6 [3]. При кои цели стойности на параметъра a уравнението $2 - 2 \cos 2x = 3a + 4 \sin x$ има поне едно решение?

Решение. Дефинираме функцията $f(x) : f := x \rightarrow \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{4}{3} \cdot \sin(x)$. Тя е периодична с период 2π или по-малък период. Построяваме нейната графика, например с командата `smartplot(f(x))`.



От графиката на функцията се вижда, че нейният период не може да е по-малък от 2π . За да определим за кои стойности на параметъра a уравнението $f(x) = a$ има поне едно решение, е достатъчно да намерим най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[0, 2\pi]$. Точките от този интервал, в които функцията има локални екстремуми, намираме с командата `ExtremePoints(f(x), x = 0..2 * pi)`. Пресмятаме

$$\min\left(f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{5 \cdot \pi}{6}\right), f\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right), f(2 \cdot \pi)\right) = -\frac{1}{3} \text{ и}$$

$$\max\left(f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{5 \cdot \pi}{6}\right), f\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right), f(2 \cdot \pi)\right) = \frac{8}{3}.$$

Следователно търсените стойности на a са всички цели числа, които попадат в интервала $\left[-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right]$. Това са числата 0, 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Ангелов, А. Дишлиев, Б. Кираджиев, М. Маринов, П. Стоев, В. Тодоров, Д. Тодоров. Конкурсите по математика в техническите и икономическите университети 1999–2001. Анубис, София, 2002.
- [2] П. Горнщейн, В. Полонски, М. Якир. Задачи с параметри. Академично издателство „Марин Дринов“, София, 1996.
- [3] З. Запрянов. Параметрични уравнения, неравенства и системи. ИК „Свят. Наука“, София, 2000.
- [4] К. Чакърян, П. Сидеров, В. Хаджийски. Сборник по математика за 9–12 клас и кандидатстуденти. Веди, София, 2000.

Младен Денев Манев
Катедра Математика
Технически университет – Габрово
ул. „Хаджи Димитър“ 4
5300 Габрово, България
e-mail: ml.manev@gmail.com

APPLICATION OF MAPLE FOR SOLVING SOME PARAMETRIC PROBLEMS

Mladen Manev

In this article we discuss some applications of computer algebra system *Maple* in Mathematics Education, appropriate for high school students.