

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2013
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2013
*Proceedings of the Forty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 2–6, 2013*

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗАДАЧИ*

Юлия Нинова*, Веселка Михова**

В статията се разглежда един начин за формулиране на еквивалентни задачи на базата на конкретен модел, използващ средства на съждителното смятане.

Понятието „еквивалентни“ задачи. Д. Пойа описва понятието *еквивалентни задачи* по следния начин.

Две задачи са еквивалентни, ако решението на коя да е от тях включва решението и на другата ([1], стр. 93–94; [2], стр. 231–232).

Замяната на една задача с еквивалентна на нея в [1, 2] се нарича *еквивалентна (обратима, възвратима, двустранна) редукция*.

Еквивалентна редукция се получава и когато дадено условие заменим с друго, еквивалентно на него. Тя е полезен метод, особено в случаите, когато еквивалентната задача има по-просто или по-красиво решение [1, 2].

Такава редукция може да се прави и с помощта на логически еквивалентности, използвани като модели. Използвайки конкретна логическа еквивалентност ще приложим този подход за формулиране на еквивалентни задачи.

С помощта на формалната логика може да се направи логически модел на задачата. Той не определя методите на решаване, но определя броя на възможните случаи, които трябва да се разгледат. Съставянето на модел на задача определя нейната структура. Тя, от своя страна, определя и сложността на начините за решаването ѝ. Изборът на средства за решаване на задачата е субективен и зависи от нивото на теоретичните знания.

Ефектът от логическия модел е в определяне на случаите, които трябва да се разгледат при решаването на задачата, в търсене на различни решения, в използване на различни средства и евентуално в търсене на по-просто по структура решение.

За формулиране на еквивалентни задачи ще използваме като модел еквивалентността от формалната логика

$$(*) \quad p \wedge \bar{q} \rightarrow s \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee s.$$

За нейното доказателство

$$p \wedge \bar{q} \rightarrow s \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{\bar{q}}) \vee s \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \vee s \Leftrightarrow \bar{p} \vee (q \vee s) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee s$$

се използва логическият закон $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$.

*Тази работа е частично финансирана от договор 105/2012 СУ.

**Тази работа е частично финансирана от договор 026/2012 СУ.

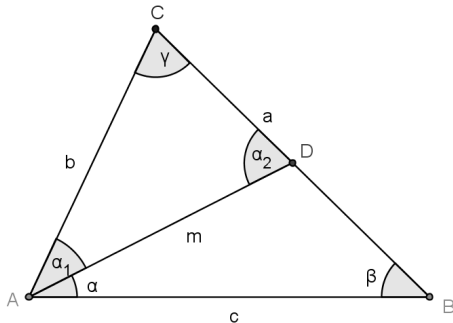
Еквивалентността (*) показва, че задачите, чиито логически структури съвпадат със структурата на съжденията в този модел, са еквивалентни, според описанията на това понятие, дадени от Д. Пойа [1, 2].

Следователно, откриването на решение на едната задача означава, че е решена и другата. Последното пък означава, че можем да изберем онази от две еквивалентни задачи, структурата на решението на която е най-тясно свързана с конкретните цели.

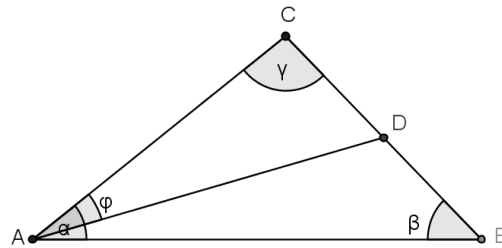
Примери и коментари.

Задача 1. [3, стр.211, зад. 246] В $\triangle ABC$ е прекарана медианата AD . Да се докаже, че ако $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$ и $AB \neq AC$, то $\angle BAC = 90^\circ$.

Решение. Въвеждаме означенията (Черт. 1) $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \alpha_1$, $\angle ADC = \alpha_2$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$.



Черт. 1



Черт. 2

По условие $\alpha_1 = 90^\circ - \beta$, AD е медиана в $\triangle ABC$ и $AB \neq AC$. Следователно
(1) $\alpha \neq \alpha_1$ и $\alpha_2 = \alpha + \beta \neq 90^\circ$.

Тъй като AD е медиана в $\triangle ABC$, то $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$ и получаваме

$$(2) \quad \frac{mc \sin \alpha}{2} = \frac{mb \sin (90^\circ - \beta)}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

При приетите означения се получава, че $\gamma = 180^\circ - ((\alpha + \beta) + (90^\circ - \beta)) = 90^\circ - \alpha$. Прилагаме синусовата теорема за $\triangle ABC$ и получаваме

$$(3) \quad \frac{c}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

От изводи (2) и (3) следва, че

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \beta \cos \beta \Leftrightarrow \sin (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta) = 0.$$

Поради (1) последното равенство е изпълнено само когато $\alpha = \beta$, откъдето следва, че $\angle BAC = \alpha + (90^\circ - \beta) = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$. $\square$

Моделът на тази задача съвпада с лявата страна на еквивалентността (*). Следователно, еквивалентна на дадената задача може да се формулира по един от следните начини (задача 2, задача 3).

Задача 2. В $\triangle ABC$ е прекарана медианата AD . Да се докаже, че ако $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$ и $\angle BAC \neq 90^\circ$, то $AB = AC$.

Задачата може да се докаже с косвен метод на доказателство, използвайки твърдението от предходната задача.

Задача 3. В $\triangle ABC$ е прекарана медианата AD . Да се докаже, че ако $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$, то $AB = AC$ или $\angle BAC = 90^\circ$.

Първо решение. Нека означим (Черт. 2) $\angle DAC = \varphi$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Тогава $\varphi + \beta = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ - \varphi$, $\alpha - \varphi + \gamma = 90^\circ$ и $\gamma = 90^\circ - (\alpha - \varphi)$. Прилагаме синусовата теорема за $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ и получаваме съответно $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin(\alpha - \varphi)}$, $\frac{AD}{\sin \gamma} = \frac{CD}{\sin \varphi}$, т.е. $\frac{AD}{\cos \varphi} = \frac{BD}{\sin(\alpha - \varphi)}$, $\frac{AD}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{CD}{\sin \varphi}$. Понеже $BD = CD$, то от горните равенства се получава тригонометричното уравнение $\cos \alpha \sin(2\varphi - \alpha) = 0$, чиито решения са $\alpha = 90^\circ$ или $\alpha = 2\varphi$.

Ако $\alpha = 2\varphi$, то $\triangle ABC$ е равнобедрен, защото AD е едновременно и медиана и ъглополовяща през върха A .

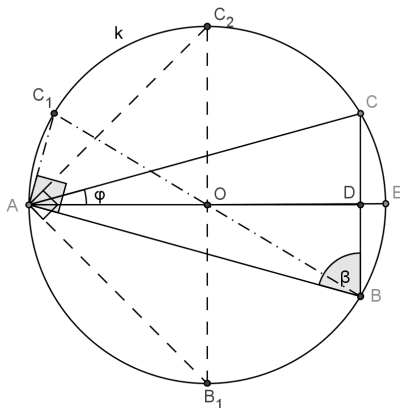
Ако $\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 2\varphi$, то $\triangle ABC$ е равнобедрен и правоъгълен. $\square$

Второ решение. Нека означим $\angle DAC = \varphi$, $\angle ABC = \beta$. Да означим с k описаната около $\triangle ABC$ окръжност (Черт. 3) и с O – нейния център. Нека $AD \cap k = E$. Понеже $\angle ABC = \beta$ и $\angle DAC = \angle EAC = \varphi$ са вписани в окръжността и $\varphi + \beta = 90^\circ$, то отсечката AE е диаметър на окръжността k , а страната BC е хорда в нея, която има за среда D , пресечната си точка с диаметъра.

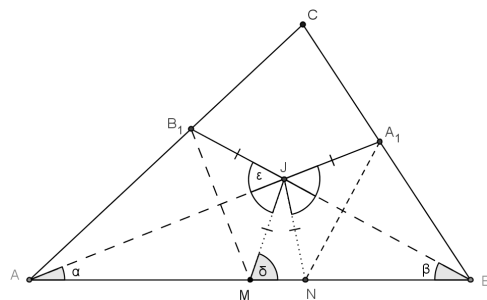
Възможни са следните случаи за взаимно разположение на диаметъра AE и хордата BC :

- хордата BC не е диаметър и тогава триъгълникът ABC е равнобедрен (Черт. 3), или
- хордата BC_1 е диаметър в окръжността k . Тогава точките O и D съвпадат и $\triangle ABC_1$ е правоъгълен (Черт. 3).

В случая, когато хордата B_1C_2 е диаметър, перпендикулярен на диаметъра AE , $\triangle AB_1C_2$ е правоъгълен и равнобедрен. $\square$



Черт. 3



Черт. 4

Ако сменим структурата на заключението на задачата с използване на логически съюз „двойно или“, т.е. да отхвърлим случая на правоъгълен равнобедрен триъгълник, то задачата може да се преформулира, като се добави допълнително условие.

Задача 4. В $\triangle ABC$ е прекарана медианата AD . Да се докаже, че ако $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$ и поне един от ъглите при върховете B и C няма мярка 45° , то или $AB = AC$, или $\angle BAC = 90^\circ$.

Да разгледаме друга група от еквивалентни задачи.

Задача 5. В $\triangle ABC$ са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 , пресичащи се в точка J . Да се докаже, че ако $JA_1 = JB_1$ и $CA \neq CB$, то $\angle BCA = 60^\circ$.

Решение. Въвеждаме следните означения (Черт. 4) $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCA = \gamma$. Използвайки осевите симетрии σ_{AA_1} и σ_{BB_1} , построяваме

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\sigma_{AA_1}} & M \\ A_1 & \xrightarrow{\sigma_{BB_1}} & N \end{array}$$

Тогава

$$(4) \quad \angle B_1JA = \angle MJA = \angle A_1JB = \angle BJN = \varepsilon \quad \text{и} \quad B_1J = MJ = NJ = A_1J.$$

Допускаме, че образите M и N на B_1 и A_1 съответно са различни точки. От (4) следва, че $\triangle NMJ$ е равнобедрен, т.е. $\angle NMJ = \angle MNJ = \delta$. Съществуват две възможности за наредба на колинеарните точки M , N , A и B . Нека, например, M е между A и N . Тогава от $\triangle AMJ$ следва, че

$$(5) \quad \delta = \alpha + \varepsilon,$$

а от $\triangle BNJ$ следва, че

$$(6) \quad \delta = \beta + \varepsilon.$$

От (5) и (6) следва, че $\alpha = \beta$, което противоречи на условието $CA \neq CB$. Следователно точките M и N съвпадат. Тогава точката J се явява медицентър и ортоцентър за $\triangle A_1MB_1$, което е достатъчно да се твърди, че той е равнобедрен. Следователно $\angle A_1MB_1 = 60^\circ$. Тъй като $\angle AMB_1 = 90^\circ - \alpha$, а $\angle BMA_1 = 90^\circ - \beta$ и $\angle AMB_1 + \angle BMA_1 + \angle A_1MB = 180^\circ$, то $\alpha + \beta = 60^\circ$ и $\angle BCA = \gamma = 60^\circ$. $\square$

Логическият модел на тази задача съвпада с лявата страна на еквивалентността (*). Следователно, еквивалентна на дадената задача може да се формулира по един от следните два начина (Задача 6, Задача 7).

Задача 6. В $\triangle ABC$ са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 , пресичащи се в точка J . Да се докаже, че ако $JA_1 = JB_1$ и $\angle BCA \neq 60^\circ$, то $CA = CB$.

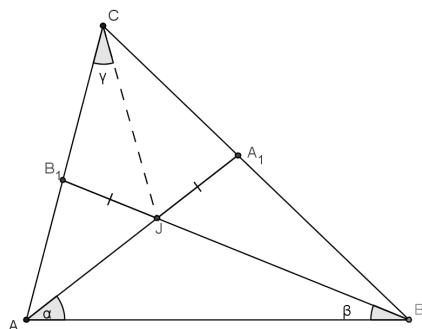
Задачата може да се докаже с косвен метод на доказателство, използвайки твърдението от предходната задача.

Задача 7. В $\triangle ABC$ са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 , пресичащи се в точка J . Да се докаже, че ако $JA_1 = JB_1$, то $CA = CB$ или $\angle BCA = 60^\circ$.

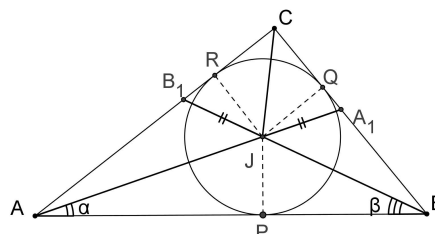
Понеже CJ е ъглополовящата на $\angle BCA$, то въвеждаме означенията (Черт. 5) $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCA = 2\gamma$. От $\triangle ABB_1$ и $\triangle ABA_1$ следва, че като външни ъгли за тези триъгълници $\angle CB_1J = 2\alpha + \beta$, $\angle CA_1J = 2\beta + \alpha$.

Първо решение. От $\triangle CB_1J$ и $\triangle CA_1J$ и синусова теорема получаваме $\frac{JB_1}{\sin \gamma} = \frac{JC}{\sin(2\alpha + \beta)}$ и $\frac{JA_1}{\sin \gamma} = \frac{JC}{\sin(2\beta + \alpha)}$. Понеже $JA_1 = JB_1$, то от горните равенства

получаваме тригонометричното уравнение $\cos \frac{3(\alpha + \beta)}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$. Решенията



Черт. 5



Черт. 6

му са $\frac{3(\alpha + \beta)}{2} = 90^\circ$ или $\alpha = \beta$, т.е. $\alpha + \beta = 60^\circ$ или $\alpha = \beta$. Тогава $\angle BCA = 60^\circ$ или $CA = CB$.

В случая, когато $\angle BCA = 60^\circ$ и $CA = CB$, $\triangle ABC$ е равностранен. $\square$

Второ решение. Нека точките P , Q и R са допирните точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност съответно до страните AB , BC и AC (Черт. 6).

Тъй като $JA_1 = JB_1$, то или $R = B_1$ и $Q = A_1$, или $R \neq B_1$ и $Q \neq A_1$. Действително, ако допуснем противното, ще стигнем до противоречие. Нека, например, $R = B_1$ и $Q \neq A_1$. Понеже $JR = JQ$ като радиуси на вписаната в триъгълника окръжност, то от $R = B_1$ следва $JA_1 = JB_1 = JR = JQ$, което е невъзможно, защото JQ е катет, а JA_1 е хипотенуза в правоъгълния $\triangle JQA_1$.

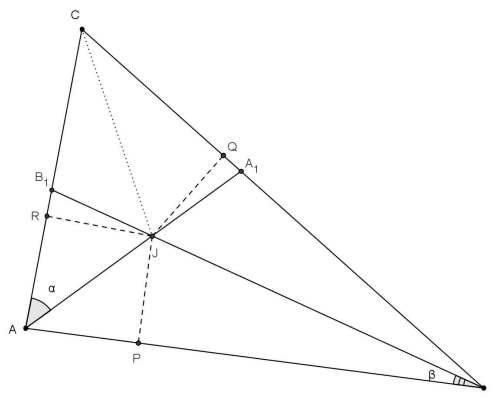
- Нека $R = B_1$ и $Q = A_1$. Тогава $\triangle ABC$ е равностранен, защото ъглополовящите AA_1 и BB_1 са перпендикулярни на съответните страни. Следователно $CA = CB$ и $\angle BCA = 60^\circ$.

- Нека $R \neq B_1$ и $Q \neq A_1$. Възможни са два случая.

(а) Точките R и Q са едновременно вътрешни, респ. външни, за $\angle B_1JA_1$ (Черт. 6). Верни са твърденията $\triangle CJR \cong \triangle CJQ$ и $\triangle B_1JR \cong \triangle A_1JQ$.

Следователно $\triangle CJB_1 \cong \triangle CJA_1$ и $\angle CB_1J = \angle CA_1J$, т.е. $2\alpha + \beta = 2\beta + \alpha$ или $\alpha = \beta$ и $\triangle ABC$ е равнобедрен.

(б) Едната от точките R и Q е вътрешна за $\angle B_1JA_1$, а другата – външна (Черт. 7). Нека, например, точка R е между точките A и B_1 , а точката Q е между точките A_1 и C . Тогава от верните твърдения $\triangle CJR \cong \triangle CJQ$ и $\triangle RJB_1 \cong \triangle QJA_1$ следва, че $\angle RB_1J = \angle QA_1J$, т.е. $180^\circ - (2\alpha + \beta) = \alpha + 2\beta$ или $\alpha + \beta = 60^\circ$. Следователно $\angle BCA = 60^\circ$. $\square$



Черт. 7

Ако сменим структурата на заключението на задачата с използване на логически съюз „двойно или“, т.е. да отхвърлим случая на равнобедрен триъгълник, то задачата може да се преформулира, като се добави допълнително условие.

Задача 8. В $\triangle ABC$ са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 , пресичащи се в точка J и поне една от дадените ъглополовящи не е перпендикулярна на съответната си страна. Да се докаже, че ако $JA_1 = JB_1$, то или $CA = CB$, или $\angle BCA = 60^\circ$.

Заключение. В статията генерирането на група от еквивалентни задачи се основава на логическа еквивалентност, разкриваща структурата на задачата. На базата на използвания модел в зависимост от структурата на задачата могат да се формулират повече от една еквивалентни задачи на дадената. Различните решения на класа еквивалентни задачи в случая подсказват и възможност за преформулиране на задачата чрез смяна на логическата структура на заключението ѝ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. Пойа. Как да се решава задача. София, Народна просвета, 1972.
- [2] Д. Пойа. Математическото откритие. За разбирането, изучаването и обучаването в решаване на задачи. София, Народна просвета, 1968.
- [3] И. Ф. ШАРЫГИН. Факультативный курс по математике, решение задач, 10. класса. Москва, Просвещение, 1989.

Юлия Нинова
 Веселка Михова
 Факултет по математика и информатика
 Софийски университет „Св. Климент Охридски“
 бул. Джеймс Баучер № 5
 1164 София
 e-mail: julianinova@hotmail.com
 mihova@fmi.uni-sofia.bg

EQUIVALENT PROBLEMS

Julia Ninova, Vesselka Mihova

This article discusses a way of generating groups of equivalent problems. The method is based on logical equivalences.