

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2017
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2017
Proceedings of the Forty-sixth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 9–13, 2017

НЯКОИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ПРОБЛЕМИ
НА ОБЩАТА ТЕОРИЯ НА ОТНОСИТЕЛНОСТТА

Стойчо Язджиев

В този доклад са представени някои нерешени математически проблеми в общата теория на относителността, свързани с хипотезата за космическата цензура. Изложението е самосъгласувано и сравнително неформално, като е представена физическата аргументация за съответните математически понятия и конструкции.

1. Пространство-време. В общата теория на относителността математическият модел на пространство-времето е двойката (M, g) , където M е свързано 4-мерно гладко (хаусдорфово) многообразие и g е лоренцова метрика (т.е. метрика със сигнатура $(-, +, +, +)$) върху M [1, 2]. Точките на M се наричат *събития*. Два модела (M, g) и (M', g') на пространство-времето са еквивалентни, ако са изометрични, с други думи, ако съществува дифеоморфизъм $\sigma : M \rightarrow M'$, такъв че $\sigma_*g = g'$. Лоренцовата метрика разделя (ненулевите) вектори v от тангенциалното пространство T_pM в точката $p \in M$ на *времеподобни*, *изотропни* и *пространственоподобни* в зависимост от това дали $g(v, v)$ е съответно отрицателно, нула или положително. Една крива γ се нарича *времеподобна*, *изотропна* или *пространственоподобна*, ако нейният допирателен вектор е съответно времеподобен, изотропен или пространственоподобен. Под *причинна* крива ще разбираме крива, която е или времеподобна или изотропна. От физически съображения е естествено да предположим, че има локална стрела на времето, която е дефинирана непрекъснато във всяка точка на пространство-времето. От математическа гледна точка е достатъчно да е възможно непрекъснато разделяне на причинните вектори (времеподобни и изотропни) на два класа, които от физически съображения наричаме *насочени в бъдещето* и съответно *насочени в миналото*. В този случай казваме, че пространство-времето е *време-ориентируемо*.

Сега ще въведем съвсем накратко някои основни понятия от причинната топология на пространство-времето [1, 2, 3]. Нека да разгледаме множество $A \in M$. С $I^+(A)$ ще означим множеството от всички точки в M , които могат да се достигнат по насочени в бъдещето времеподобни криви, започващи от A . Множеството $I^+(A)$ се нарича *хронологично бъдеще* на A . Множеството $J^+(A)$, състоящо се от всички точки, които могат да бъдат достигнати по насочени в бъдещето причинни криви, започващи от A , се нарича *причинно бъдеще* на A . По напълно аналогичен начин се дефинират хронологичното минало $I^-(A)$ и причинното минало $J^-(A)$ на A . От

физическа гледна точка $J^-(A)$ са всички онези събития, които могат да влияят върху събитията от A , а $J^+(A)$ са всички онези събития, върху които могат да влияят събитията от A .

Нека сега да разгледаме пространственоподобна хиперповърхнина Σ . Да дефинираме множеството от всички събития, които в определен смисъл са напълно определени от Σ . Област на зависимост от Σ в бъдещето се нарича множеството $D^+(\Sigma)$, състоящо се от всички събития $p \in M$, за които всяка насочена в миналото причинна крива през p пресича Σ . Област на зависимост от Σ в миналото $D^-(\Sigma)$ се дефинира аналогично, като бъдеще и минало се разменят в горната дефиниция за $D^+(\Sigma)$. Пълната област на зависимост от Σ се дефинира като обединението $D(\Sigma) = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$.

Една пространственоподобна хиперповърхнина Σ се нарича *хиперповърхнина (повърхнина) на Коши*, ако $D(\Sigma) = M$. Всяко пространство-време (M, g) , което притежава повърхнина на Коши Σ , се нарича *глобално хиперболично пространство-време*. За глобално хиперболично пространство-време може да се въведе глобално време t , такова че всяка хиперповърхнина $t = \text{const}$ е повърхнина на Коши. С други думи M се разслоява от повърхнините на Коши и топологията на M е $R \times \Sigma$, където Σ е някоя повърхнина на Коши [1, 2, 3].

2. Уравнения на Айнщайн и някои техни решения. Метриката на пространство-времето g удовлетворява уравненията на Айнщайн

$$(1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

където $R_{\mu\nu}$ е тензорът на Ричи, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ е скаларната кривина на Ричи и $T_{\mu\nu}$ е тензорът на енергията-импулса на материалните полета, дефинирани върху пространство-времето (M, g) [1, 2, 3]. Тези уравнения са изключително сложна система от нелинейни частни диференциални уравнения и могат да се решат само в определени случаи, които като правило се характеризират с висока група на симетрии (изометрии).

2.1. Пространство на Минковски. Пространството на Минковски (R^4, η) е най-простото решение на уравненията на вакуумните ($T_{\mu\nu} = 0$) уравнения на Айнщайн. Математически това е многообразието R^4 , снабдено с плоската метрика η , която в естествените глобални координати (t, x^1, x^2, x^3) за R^4 има вида

$$(2) \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2.$$

Съответно в сферични координати метриката на Минковски приема вида

$$(3) \quad ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2,$$

където $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ е метриката върху единичната сфера.

Пространство-времето на Минковски е глобално хиперболично, като повърхнините на Коши се дават от $t = \text{const}$.

2.2. Решение на Шварцшилд. Решението на Шварцшилд описва статичното, сферично симетрично пространство-време извън статично и сферично симетрично тяло. Метриката на това решение, записана в сферични координати, има вида [1, 2, 3]

$$(4) \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\Omega_2^2,$$

където m е масата на тялото. Ако тялото има размер r_0 , по-малък от гравитационния радиус $2m$, тогава решението на Шварцшилд описва черна дупка. В този случай хоризонтът на събитията лежи при $r = 2m$. На пръв поглед изглежда, че хоризонтът на събитията $r = 2m$ е сингулярност за метриката, но това е само особеност на координатната карта. Може да се подбере координатна карта, която няма особеност и дори покрива и вътрешността на черната дупка. Това е известното разширение на Крускал, което е и глобално хиперболично. Все пак вътре в черната дупка на Шварцшилд $r = 0$ е истинска сингулярност, където тензорът на кривината е без-крайност.

2.3. Решение на Кер. Решението на Кер е решение на вакуумните уравнения на Айнщайн и описва въртяща се черна дупка. Метриката на това решение, записана в координати на Бойер-Линдквист, има вида [1, 2, 3]

$$(5) \quad ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Xi} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Xi} dt d\phi + \frac{\Xi}{\Delta} dr^2 + \Xi d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Xi} d\phi^2,$$

където $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$, $\Xi = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Параметрите m и a удовлетворяват неравенството $|a| \leq m$ и физически представляват съответно масата и ъгловия момент на единица маса. Хоризонтът на събитията лежи при $r = m + \sqrt{m^2 - a^2}$. При $a = 0$ решението на Кер се свежда до решението на Шварцшилд. Както решението на Шварцшилд, така и решението на Кер може да се продължи гладко за $r < m + \sqrt{m^2 - a^2}$. Подобно на решението на Шварцшилд, решението на Кер крие сингулярности зад хоризонта на събитията. По-точно, вътре в черната дупка имаме пръстеновидна сингулярност, разположена при $(r = 0, \theta = \pi/2)$ [1, 2].

3. Задача на Коши в общата теория на относителността. Да разгледаме глобално хиперболично пространство-време (M, g) . Тогава, както знаем, M се разслоява от повърхнините на Коши Σ_t , параметризирани с глобалното време t . Да означим с n^μ единичната (времениподобна) нормала към Σ_t . Четиримерната пространствено-времева метрика $g_{\mu\nu}$ индуцира по естествен начин тримерна Риманова метрика $h_{\mu\nu}$ върху Σ_t , дадена от формулата

$$(6) \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu.$$

Да въведем също и „потокът на времето“, зададен от векторното поле τ^μ , дефинирано по следния начин $\tau^\mu \nabla_\mu t = 1$. Векторното поле τ^μ може да се разложи на две компоненти, съответно нормална и тангенциална към Σ_t :

$$(7) \quad N = \tau^\mu n_\mu,$$

$$(8) \quad N_\mu = h_{\mu\nu} \tau^\nu.$$

Еволюцията във времето ни движи от повърхнината Σ_0 до повърхнината Σ_t . Ако отъждествим Σ_0 и Σ_t чрез естествения дифеоморфизъм, генериран от векторното поле τ^μ , тогава еволюцията във времето може да се разглежда като еволюция във времето на $h_{\mu\nu}$ върху абстрактно 3-мерно Риманово многообразие Σ . С други думи, самото глобално хиперболично пространство-време може да се разглежда като представяне на времевата еволюция на Риманова метрика върху фиксирано 3-мерно многообразие. От физическа гледна точка всичко това означава, че разглеждаме 3-мерната пространствена метрика върху 3-мерните повърхнини като динамична про-

менлива в общата теория на относителността (ОТО). Функцията N (*lapse функция*) и векторът N^μ (shift вектор) не са динамични променливи, тъй като могат да бъдат избирани произволно и единствено определят как да се движим напред във времето.

В духа на класическата задача на Коши за частни диференциални уравнения е естествено да предполагаваме, че началните условия в ОТО се състоят от Римановата метрика $h_{\mu\nu}$ и нейната „производна по времето“ върху Σ . Разбира се „производна по времето“ трябва да се дефинира по инвариантен начин. Добре известно е, че вътрешната геометрия на Σ се определя от $h_{\mu\nu}$, докато външната геометрия на Σ , като повърхнина, вложена в пространство-времето, се определя от външната кривина (втората фундаментална форма) $K_{\mu\nu}$, дефинирана така

$$(9) \quad K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu,$$

където $\mathcal{L}_n$ е Ли-производната по направление на n^μ . Именно външната кривина трябва инвариантно да се асоциира с „времевата производна“ на $h_{\mu\nu}$. Действително, ако разпишем външната кривина в по-разгърнат вид имаме

$$(10) \quad K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} N^{-1} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} - D_\mu N_\nu - D_\nu N_\mu \right),$$

където D_μ е ковариантната производна по отношение на $h_{\mu\nu}$.

Нашите разсъждения дотук показват, че в ОТО началните данни на Коши се състоят от тройката $(\Sigma, h_{\mu\nu}, K_{\mu\nu})$ [1, 2, 3]. Тези начални данни обаче са подчинени на определени връзки, които следват от полевите уравнения на Айнщайн. Да запишем вакуумните полеве уравнения на гравитационното поле в термини на $h_{\mu\nu}$ и $K_{\mu\nu}$. Използвайки уравненията на Гаус-Кодаци за влагането $\Sigma_t \hookrightarrow M$ и след дълги изчисления получаваме, че вакуумните уравнения на Айнщайн са еквивалентни на следната система [1, 2, 3]:

$$(11) \quad {}^{(3)}R + (K_\mu^\mu)^2 - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = 0,$$

$$(12) \quad D_\mu (K^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} K^\alpha_\alpha) = 0,$$

$$(13) \quad \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} = -2N K_{\mu\nu} + D_\mu N_\nu + D_\nu N_\mu,$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial t} = & N({}^3R_{\mu\nu} - 2K_\mu^\alpha K_{\alpha\nu} + K_\alpha^\alpha K_{\mu\nu}) + N^\alpha D_\alpha K_{\mu\nu} + K_{\mu\alpha} D_\nu N^\alpha \\ & + K_{\nu\alpha} D_\mu N^\alpha. \end{aligned}$$

Тук ${}^3R_{\mu\nu}$ и ${}^{(3)}R$ са съответно тензорът и скаларът на Ричи по отношение на тримерната Риманова метрика $h_{\mu\nu}$.

Това, което е важно да се отбележи е, че докато уравненията (13) и (14) са еволюционни уравнения, то уравненията (11) и (12) са всъщност връзки. Следователно данните на Коши $(h_{\mu\nu}, K_{\mu\nu})$ върху Σ не могат да се задават произволно, а трябва да са подчинени на връзките (11) и (12). Важно е също да се отбележи, че ако връзките (11) и (12) са удовлетворени в началния момент, те са удовлетворени във всеки следващ. Това следва от тъждествата на Бианки.

В сила е следната фундаментална теорема [1, 2, 3, 4].

Теорема. *Нека Σ е гладко тримерно многообразие, $h_{\mu\nu}$ е гладка Риманова метрика върху Σ и $K_{\mu\nu}$ е гладко симетрично тензорно поле върху Σ . Нека освен това $h_{\mu\nu}$ и $K_{\mu\nu}$ удовлетворяват връзките (11) и (12). Тогава съществува единствено*

гладко пространство-време $(M, g_{\mu\nu})$, наречено максимално развитие по Коши на $(\Sigma, h_{\mu\nu}, K_{\mu\nu})$, имащо следните свойства:

- 1) $(M, g_{\mu\nu})$ е решение на вакуумните уравнения на Айнщайн.
- 2) $(M, g_{\mu\nu})$ е глобално хиперболично с хиперповърхнина на Коши Σ .
- 3) Индуцираната метрика и възникната кривина на Σ са съответно $h_{\mu\nu}$ и $K_{\mu\nu}$.
- 4) Всяко друго пространство-време, удовлетворяващо 1), 2) и 3), е изометрично на подмножество на $(M, g_{\mu\nu})$.
- 5) Пространствено-времева метрика $g_{\mu\nu}$ зависи непрекъснато от началните данни $(h_{\mu\nu}, K_{\mu\nu})$ върху Σ .

Значението на горната теорема се състои в следното. Първо, тя показва, че задачата на Коши за ОТО е коректно поставена, което е крайно желателно от физическа гледна точка. Второ, тя установява съответствие между глобално хиперболичните времепространства с началните данни $(\Sigma, h_{\mu\nu}, K_{\mu\nu})$. Теоремата решава въпроса за глобалното съществуване и единственост в ОТО. Всички останали въпроси всъщност засягат свойствата на максималното развитие по Коши.

Горната теорема може да се обобщи и в присъствие на материя с тензор на енергията-импулса $T_{\mu\nu}$, когато материалните полета се описват от подходящи динамични уравнения и самият тензор на енергията-импулса зависи само от полетата, метриката и техните първи производни. В този случай връзките имат вида [1, 2, 3]:

$$(15) \quad {}^{(3)}R + (K_{\mu}^{\mu})^2 - K^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = 16\pi\rho,$$

$$(16) \quad D_{\mu}(K^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}K^{\alpha}_{\alpha}) = -8\pi J_{\mu},$$

където $\rho = T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}$ е плътността на енергията, а $J^{\mu} = -h^{\mu\alpha}T_{\alpha\beta}n^{\beta}$ е плътността на потока на енергията.

Теоремата за максималното развитие сама по себе си не казва нищо за свойствата на пространство-времето, особено за тези, които са интересни от физическа гледна точка. Например какъв е „размерът“ на пространство-времето и дали то е причинно геодезически пълно (т.е. дали съдържа сингулярности). За да се отговори на тези въпроси, са необходими допълнителни изследвания. Фундаментален въпрос за космологията е, например, съществуването на сингулярност в миналото на Вселената. Може да се докаже, че ако $K_{\mu}^{\mu} \leq C < 0$, където C е константа, то всички насочени в миналото времеподобни геодезични са непълни [1, 2]. Нещо повече, всички такива геодезични имат дължина не по-голяма от $3/|C|$. Физическата интерпретация на този резултат е съществуването на „голям взрив“ в миналото на Вселената.

Централен проблем е съществуването и характера на пространствено-времевите сингулярности, което е от първостепенна важност в космологията и астрофизиката. Максимални разширения, които са свободни от сингулярности, се наричат *регулярни*. На строг математически език регулярните максимални разширения по Коши са тези, които са причинно геодезически пълни, т.е. всички причинни геодезични са пълни, с други думи могат да се продължат до произволни стойности на афинния параметър.

Ако началните данни са достатъчно близки до тривиалните данни за пространство-времето на Минковски $(R^3, \delta_{\mu\nu}, 0)$, тогава имаме регулярно развитие по Коши на началните данни. Този резултат е известен като *теорема за нелинейната глобална стабилност на пространството на Минковски* [5].

Теорема. *Всички начални данни, които са достатъчно близки до тривиалните данни, имат регулярно максимално развитие по Коши в бъдещето.*

Ако началните данните са далече от тривиалните, което физически съответства на силни гравитационни полета и висока плътност на материята, тогава развитието по Коши в бъдещето може да е сингулярно [1, 2].

Теорема. *Ако началните данни съдържат уловена повърхнина, тогава развитието по Коши е причинно геодезически непълно. Този резултат важи в присъствието на произволни материални полета с тензор на енергията-импулса, удовлетворяващ условието за положителност на енергията, а именно $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ за всеки изотропен вектор v^μ .*

Уловена повърхнина се нарича всяка затворена (компактна без граница) двумерна повърхнина S в пространство-времето, която има свойството да сходя ортогоналните към нея излизащи и влизащи изотропни геодезични (светлинни лъчи) [1, 2]. Казано с други думи, уловените повърхнини се характеризират с отрицателна дивергенция и на двете изотропни нормали към тях. Наличието на уловени повърхнини е сигнал за силни гравитационни полета. Най-простият и известен пример за уловени повърхнини са повърхнините в пространство-времето на Шварцшилд с $r = r_0 < 2m$. Следователно, като следствие от горната теорема пространство-времето на Шварцшилд е причинно геодезически непълно. Добре известно е, че пространство-времето на Шварцшилд има сингулярност при $r = 0$, която всъщност е по-свирепа от геодезичната непълнота – при $r = 0$ тензорът на кривина става безкраен. Сингулярност във вътрешността си притежават и въртящите се черни дупки, описвани от решението на Кер. Нещо повече, същото се отнася и за въртящите се заредени черни дупки, описвани от решението на Кер-Нюман.

4. Хипотеза за космическата цензура. Както казахме, едни от най-важните и интересни решения за физиката, черните дупки, съдържат сингулярност във своята вътрешна област. Това, което е съществено при тези сингулярности, е фактът, че те са скрити зад хоризонта на събитията и не са видими за външни наблюдатели, намиращи се далече от черната дупка. Сингулярности, които могат да се видят от далечни наблюдатели, се наричат *голи сингулярности*. Черните дупки се образуват при гравитационен колапс и от ключово значение за физиката е да се разбере какъв тип сингулярности могат да се породят при колапс на материя. Във физиката се вярва, че голи сингулярности не могат да се образуват при реален гравитационен колапс от регулярни начални данни. С други думи, смята се, че всички сингулярности, които могат да се получат при гравитационен колапс, са скрити в черни дупки и никакви голи сингулярности, видими за далечен наблюдател, не могат да се появят. Това твърдение се нарича *хипотеза за космическата цензура* и по-точно – това е слабият вариант на хипотезата за космическата цензура [6]. Силният вариант на хипотезата за космическата цензура твърди, че времеподобни сингулярности не могат никога да се появят и дори наблюдател, падащ в черната дупка, не може да види сингулярност. В настоящия доклад ще се фокусираме само върху слабия вариант на хипотезата за космическата цензура.

Представените формулировки на хипотезата за космическата цензура в нейната слаба и силна форма са чисто физически и е необходимо сериозно прецизиране, за да бъдат формулирани на по-строг математически език. Нека първо да прецизира-

ме какво ще разбираме под *регулярни начални данни*. Регулярните начални данни се реализират от т.нар. *асимптотически плоски начални данни*. Началните данни се наричат *асимптотически плоски*, ако съществува координатна карта (x^1, x^2, x^3) , дефинирана извън достатъчно голямо компактно подмножество $A \subset \Sigma$, по отношение на която метриката $h_{\mu\nu}$ клони към стандартната евклидова метрика и външната кривина $K_{\mu\nu}$ клони към нула, когато $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \rightarrow \infty$. Ако има и материални полета, трябва също да се иска и подходящо асимптотично поведение на тези полета при $r \rightarrow \infty$, такова че интегралите, даващи запазващите се асимптотични величини като енергия, ъглов момент и заряди, да са крайни. Всъщност, като следствие от уравненията на връзките, може да се покаже, че асимптотичното поведение на метриката $h_{\mu\nu}$ и на външната кривина $K_{\mu\nu}$ е следното:

$$(17) \quad h_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \delta_{\mu\nu} + O(r^{-2}),$$

$$(18) \quad K_{\mu\nu} = O(r^{-2}),$$

където m е АДМ* масата.

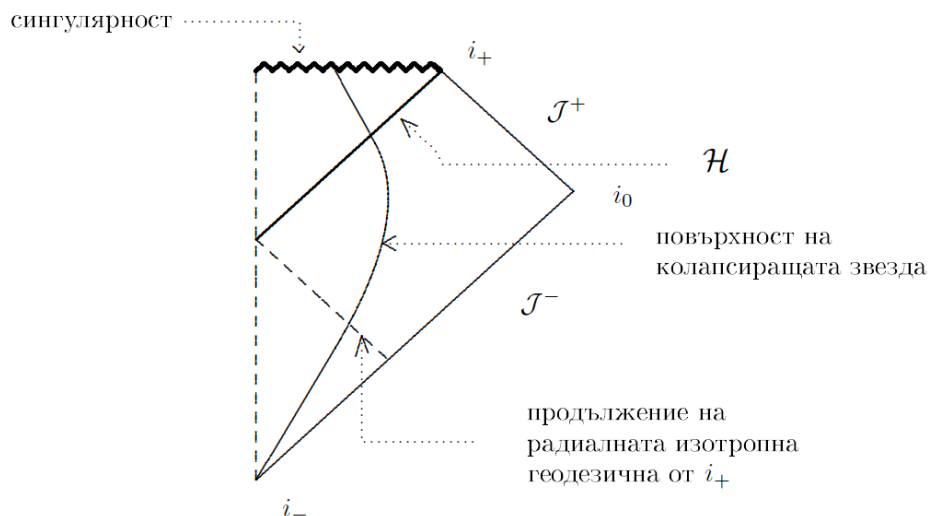
Сега да се обърнем към понятието *далечен наблюдател* и да го прецизираме от математическа гледна точка. Съгласно слабата хипотеза за космическата цензура далечният наблюдател ($r \rightarrow \infty$) няма да усети наличие на сингулярност колкото и дълго ($t \rightarrow \infty$) да наблюдава „вътрешността“ на пространство-времето. По-точно казано, трябва да се разглеждат насочени в бъдещето изотропни геодезични, върху които $r \rightarrow \infty$, тъй като информацията за вътрешната област на пространство-времето се предава чрез фотони или (гравитони), които се движат по изотропни геодезични. Тези разглеждания обаче дефинират *изотропната безкрайност в бъдещето* за пространство-времето. Оттук става ясно, че далечните наблюдатели от математическа гледна точка трябва да се асоциират с *изотропната безкрайност в бъдещето* на съответното пространство-време, която ще означаваме с $\mathcal{I}^+$ [7, 8]. Математически изотропната безкрайност в бъдещето $\mathcal{I}^+$ за пространство-времето (M, g) се конструира като конформно влагане (конформна компактификация) на физическото пространство-време в нефизично абстрактно пространство-време $(M_*, \Omega^2 g)$ с изотропна граница $\mathcal{I}^+$, където регулярният конформен фактор Ω е подбран подходящо и $\Omega(\mathcal{I}^+) = 0$, $d\Omega(\mathcal{I}^+) \neq 0$ [1, 2].

Изотропната безкрайност в бъдещето $\mathcal{I}^+$ се нарича *пълна* ако всяка насочена в бъдещето изотропна геодезична върху $\mathcal{I}^+$ може да се продължи до произволна стойност на афинния параметър. Очевидно е, че изотропната безкрайност в бъдещето за пространство-времето на Минковски е пълна. Изотропните безкрайности в бъдещето за време-пространствата на черни дупки също са пълни. Нещо повече, пълнотата на $\mathcal{I}^+$ влиза в самата дефиниция на *черна дупка*. Формалната математическа дефиниция е следната. *Черна дупка в пространство-време с пълна изотропна безкрайност в бъдещето $\mathcal{I}^+$ се нарича областта*

$$(19) \quad \mathcal{B} = M - I_*^-(\mathcal{I}^+),$$

където хронологичното минало I_*^- е спрямо по-голямото нефизично пространство-време M_* . Границата $\mathcal{H}$ на $\mathcal{B}$ в M се нарича хоризонт на събитията [1, 2, 8].

* по първите букви от фамилиите на физиците Arnowitt, Deser и Misner, въвели това понятие през 1960 г. (бел. ред.)



Фиг. 1. Конформна компактификация на пространство-време на колапсираща сферично симетрична звезда

Изискването за пълнота на изотропната безкрайност в бъдещето на физически език означава, че изискваме да няма сингулярности извън черната дупка. Ако имаше сингулярности, те биха превърнали изотропната безкрайност в бъдещето в непълна, както се вижда от фиг. 1, където е представено конформно влагане на пространство-време на черна дупка, образувана при колапс на звезда.

Вече имаме всичко необходимо, за да формулираме слабата хипотеза за космическата цензура.

Хипотеза за космическата цензура. *Произволни (несингулярни) асимптотически плоски начални данни имат максимално развитие по Коши в бъдещето, чиято изотропна безкрайност в бъдещето J^+ е пълна [6, 8].*

Тази хипотеза е един от най-сложните и нерешени математически проблеми на общата теория на относителността.

5. Математически проблеми, тясно свързани с хипотезата за космическата цензура. Тъй като хипотезата за космическата цензура е изключително трудна за доказване, специалистите в областта са възприели и друга тактика освен директните опити за нейното доказване. Тази тактика се състои в разглеждането на по-прости проблеми, които са свързани с хипотезата, и чието решаване би довело до по-дълбокото ѝ разбиране. Един такъв проблем е проблемът за стабилността на черните дупки и по-специално – за въртящите се черни дупки на Кер. Ако предположим, че хипотезата за космическата цензура е грешна, тогава резултатът от гравитационния колапс в общия случай би бил създаването на голи сингулярности. Може да се очаква тогава, че достатъчно силни въздействия (но крайни!) биха разрушили черните дупки и биха ги превърнали в голи сингулярности. В такъв случай, ако докажем, че черните дупки са стабилни, това би било в подкрепа на хипотезата за космическата цензура. Следователно, имаме следният важен математически проблем [8].

Хипотеза за глобална стабилност на черната дупка на Кер. *Всяка крайна пертурбация на началните данни на решението на Кер има развитие по Коши в бъдещето с пълна изотропна безкрайност в бъдещето, като асимптотически клони към решение на Кер с други параметри.*

Тази хипотеза е също много трудна за доказване и до настоящия момент няма доказателство. Поради това сме принудени да намалим нивото на трудност още. Естествената стъпка да изследваме аналогичен, но все пак линеен проблем, е именно следният. Можем да разгледаме тестово реално скаларно поле, удовлетворяващо линейното вълново уравнение на фона на решението на Кер [8]

$$(20) \quad \square\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = 0.$$

Хипотеза за линейната стабилност на черната дупка на Кер. *Решенията на вълновото уравнение (20), които еволюират от гладки начални данни с компактен носител, остават ограничени в областта извън хоризонта на събитията и нещо повече, заглъхват достатъчно бързо в степен, сравнима с тази в пространство-времето на Минковски.*

6. Заключение. В този доклад се опитам да представя по сравнително неформален начин някои от най-тежките и интересни математически проблеми на общата теория на относителността. Разбира се, това е само една много малка част от всички изискващи внимание математически проблеми в теорията на Айнщайн. Независимо от това те за пореден път показват онази естествена, дълбока и изключително плодотворна връзка и взаимно влияние между математиката и физиката.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. HAWKING, G. F. R. ELLIS. The large scale structure of spacetime. Cambridge, Cambridge University Press, 1973.
- [2] R. WALD. General Relativity. University of Chicago Press, 1984.
- [3] Y. CH. BRUHAT. General relativity and the Einstein equations. Oxford University Press, 2009.
- [4] Y. CH. BRUHAT, R. P. GEROCH. Global aspects of the Cauchy problem in General Relativity. *Comm. Math. Phys.*, **14**, No 4 (1969), 329–335.
- [5] D. CHRISTODOULOU, S. KLAINERMAN. The global nonlinear stability of the Minkowski space. Princeton University Press, 1993.
- [6] R. WALD. Gravitational collapse and cosmic censorship. gr-qc/9710068
- [7] D. CHRISTODOULOU. On the global initial value problem and the issue of singularities. *Class. Quant. Gr.*, (1999), A23–A35.
- [8] M. DAFERMOS, I. RODNIANSKI. Lectures on black holes and linear waves. Clay Mathematics Proceedings, Vol. **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, 97–205.

Стойчо Язаджиев
Катедра Теоретична физика
Физически факултет
Софийски университет „Св. Климент Охридски“
бул. „Джеймс Баучър“ 5
1164 София, България
e-mail: yazad@phys.uni-sofia.bg

SOME MATHEMATICAL PROBLEMS OF GENERAL RELATIVITY

Stoytcho Yazadjiev

We present in this paper some unsolved mathematical problems of General relativity related to the famous cosmic censorship conjecture. The presentation is self-contained and informal – all mathematical notions and constructions are physically based.