

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2017
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2017
*Proceedings of the Forty-sixth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 9–13, 2017*

ЧЕТВЪРТ ВЕК ТУРНИР „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“

Борислав Лазаров

В статията се прави ретроспекция на значими моменти от развитието на Есенния турнир по математика и информатика **Черноризец Храбър**. Еволюцията от елитарно състезание в цялостна образователна и изследователска програма е описана от гледната точка на ръководителя. Отделни илюстрации дават представа за измеренията на постигнатото през годините.

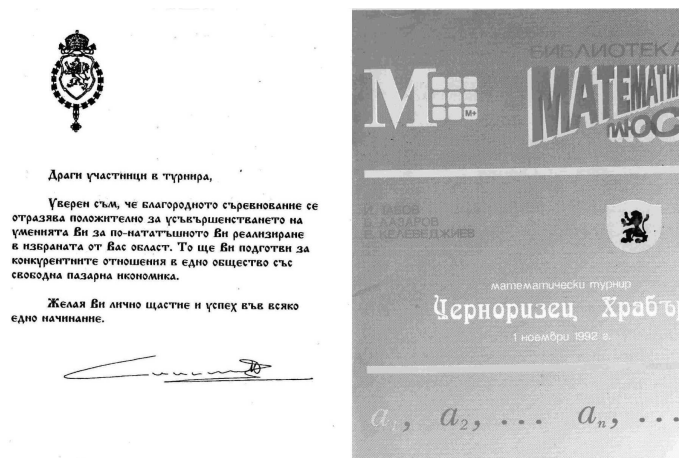
Пролог. На 1 ноември 2016 г. се проведе XXV издание на турнира *Черноризец Храбър*. Това ни дава повод да се обърнем назад и да си припомним как започна и какво развитие намери това математическо състезание за четвърт век, кои личности са допринасяли за провеждането му и с какви проблеми са се срещали, какви новаторски идеи са осъществени и какъв отзвук са получили в научните среди у нас и по света.

Годината 1992. Оценките на състоянието на българското общество в началото на 90-е години на миналия век са противоречиви: някои ги помнят с еуфорията и надеждите, други – с разрухата и унижението. Факт е, че България тогава получи огромно наследство от таланти – учители, научни работници, а оттук и ученици. Вятърът на промяната довя и идеята да се организира математическо състезание по нов за онези времена формат – тест с избираем отговор. Повече детайли за мотивите на организаторите да подхванат това начинание са дадени в увода на [1]. И така Първият есенен математически турнир „Черноризец Храбър“ се проведе на 1 ноември 1992 г. по случай наскоро възродения Ден на народните будители и под патронажа на Н.В. Цар Симеон Втори (фиг. 1).

Състезателната тема съдържаше 30 тестови единици с отговор и 4 дистрактора при време за работа 90 минути. Отгатване не се поощряваше – математическото очакване за случайно попълнени отговори беше 42 точки, а празен лист „струваше“ 90 точки. (Този формат се запази и досега в темите за 9.–12. клас.) Темата се оказа тежка: победителят в Турнира, получи 194 точки от 210 възможни.

Организацията на първото „частно“ състезание нямаше официална институционална подкрепа.¹ Имената на всички, които допринесоха за успешния старт, могат да се намерят в [1]. Тези наши съвременни народни будители полагаха усилия и отделяха време безвъзмездно, за една кауза във висша степен обществено значима

¹Министерството на образованието не помагаше, но и не пречеше на нашето начинание, за което заслуга определено има главният експерт Николай Райков (споменавам това, понеже името му го няма в [1]).



Фиг. 1. Приветствието на Царя и титулната страница на [1]

и полезна. Хвала им! По-нататък в статията ще се въздържам да споменавам имена на личности, участвали или допринасяли за провеждането и развитието на Турнира, понеже тук не може да се изпишат всичките, а е трудно да се открият някои на фона на останалите.

География и история. Първият турнир се проведе в София, Велико Търново и Стара Загора. Трите града бяха подбрани най-вече заради географското местоположение. Ученици от цялата страна трябваше да могат в рамките на един ден да се доберат до някой от тези центрове, да проведат състезанието и да се завърнат вкъщи. Поради дълбокия възпитателен подтекст на Турнира, при подбора на градовете отделихме и специално внимание на историческата значимост на централните градове. Разбира се, в това отношение почти всички български градове покриват критерия *историческа значимост*, но ограничихме бройката до три, съобразявайки се с нашите ресурси по онова време. Следващите „гнезда“ за провеждане бяха Русе, Скопие и Битоля. Към момента „гнездата“ са повече от 10 и достатъчно плътно покриват географската карта на България. За кратко турнирът се е провеждал в Московска и Архангелска област на Русия, а последните издания се организират в трите най-големи центъра на Казахстан – Алмати, Астана и Шимкент.

Връзката с българската история се подчертаваше и на официалното закриване на Турнира в сградата на галерията „Св. св. Кирил и Методий“, предоставяна ни безвъзмездно за закриването. На тържеството бяха връчвани сертификати, подписани от Царя и подпечатани с релефния печат на България от четиридесетте години на XX век.² Наградите се връчваха от изявени деятели на науката. Всичко ставаше много тържествено – слово, журналисти, коктейл.

Възрастов диапазон. В началото съставяхме една състезателна тема, която беше подходяща за най-изявените ученици от 10.–12. клас. Постепенно добавяхме теми за 7.–8. клас, 5.–6. клас, 3.–4. клас, накрая и за второкласници, а темата за

² Доколкото ми е известно, това бяха единствените документи, подпечатвани с този печат.

„големите“ се раздели на две: за 9.–10. и 11.–12. клас. През последните години се утвърди формат, при който в съответните класове броят на тестовите единици в темите варира от 15 до 30; различен е и регламентът за оценяване [2]. Включени са задачи за ученици с различна подготовка по математика – от най-леки, чисто технически, до трудни, изискващи много и разностранни качества: синтез от знания и умения, бърза реакция, икономично проведени изчисления, а също известна доза математическо чувство.

Такова групиране е удобно за нас и за учениците от горния курс, но за децата до 6. клас съдържа неудобства. В момента изследваме и анализираме доколко и как се проявява възрастовият фактор при работа по една тема във възрастовата група 5.–6. клас [3].

Тематика в състезателните теми. В състезателните теми са застъпени традиционните области като аритметика, геометрия, алгебра и анализ. Отделяме подобаващо внимание и на въпроси от комбинаториката, вероятностите [4], кодирането [5]. Някои математически идеи, свързани с числени методи и алгоритми, са представени чрез псевдокод [6]. Появяват се и *екзотики*, като лингвистика, фрактали и крайни автомати. Необичайно за тема от 25 или 30 тестови единици са включвани задачи с много данни, изискващи бързо ориентиране при организацията им [7].

Развитие на дидактическия инструментариум. Дълго време турнирът „Черноризец Храбър“ оставаше флагманът на тестовите състезания в България. Тази му позиция го натоварваше с определени отговорности към математическата колегия, работеща в областта на образованието. Темите, ориентирани към изявени ученици, съдържаха и ясни послания за учителите, работещи с такива ученици. Чрез примери в състезателни теми се показваше как може да се въвежда идея за фазово пространство при по-малки ученици [8], как да се премине от класическа към геометрична вероятност [4] и др.

Изследвания върху представянето на учениците ни помагаша да разберем по какъв начин един или друг формат за записване на условията бива възприеман от учениците [9]. Също от статистиките на турнира правехме заключения за развитието на елементи на ученическата компетенция от синтетичен тип в различни възрастови групи [10].

Образователното въздействие на отделно математическо състезание, колкото и многообразно да е по отношение на тематиката, значително се ограничава във времето. Това даде основание на екипа ни да премине рубежа на единична инициатива в рамките на годишен цикъл и да излезе в „оперативния простор“ на една цялостна система за работа с изявени ученици. В момента действащата Образователна и изследователска програма „Черноризец Храбър“ (ОИП-ЧХ) предоставя възможност за целогодишна пряка работа в целевата група 4.–8. клас. В съпътстващо обучение [11] се включват лекционни курсове и дидактически игри (фиг. 2).

Оказа се обаче, че само статистиката не дава обяснение на много феномени в математическото развитие на учениците. Поради това в нашата изследователска работа бяха включени индивидуални образователни траектории [12]. В рамките на ОИП-ЧХ конкретна определяща поведението среда може успешно да се допълва с подходящо проектно-ориентирано обучение, основано на изследователски подход [13].



Фиг. 2. Момент от дидактическа игра в рамките на ОИП-ЧХ

Международни измерения. Първият турнир получи бързо международен отзвук с публикацията [14]. На втория конгрес на Световната федерация на националните математически състезания (WFNMC) през 1994 г. в Правец беше изнесен докладът [15], в който се представяха някои дидактически специфики на Турнира. Изследвания, проведени на базата на турнирни теми и представянето на учениците върху тях, са докладвани на международни конгреси и конференции в Германия, Китай, Корея, Латвия, Македония, Русия, а също на престижни международни форуми, провеждани у нас.

В серията Enrichment на Австралийския математически тръст беше отпечатан сборникът [16], който впоследствие беше цитиран в работи на австралийски, канадски, руски, полски и други автори. В Русия излезе сборникът [17] (фиг. 3).



Фиг. 3. Първа корица на сборниците [16] и [17]

От 2008 г. насетне ежегодно се организират изяви с международно представителство, пряко или косвено свързани с Турнира. Това са майсторски класове, семинари, школи, в които участват ученици и учители от Казахстан и Русия. С подписването първо на Споразумение за сътрудничество между ИМИ и РНПЦ „Дарын“ – Казахстан, а по-късно и на Проектно споразумение между ИМИ и Фондация „Интелектуал

2050“ – Казахстан, тези дейности се легитимираха като част от ОИП-ЧХ. Това даде възможност и за научен обмен между ИМИ и двете казахстански институции – членове на екипа, реализиращ ОИП-ЧХ, гостуват в Казахстан и съответно казахстански гости идват на посещение у нас (фиг. 4).



Фиг. 4. Моменти от международни инициативи в рамките на ОИП-ЧХ

Няколко примера. По-горе изредихме тематичните направления, застъпени в темите на Турнира. Този списък обаче не дава представа за *букетите* от идеи, появяващи се в отделни тестови единици. С няколко примера ще илюстрираме тази страна на Турнира.

2016, 9-12. Програмата

$a := 2016$

докато $a > 0$ изпълнявай

$\{c := \lfloor a/4 \rfloor, d := a - 4 \cdot c, \text{печатай } d, a := c\}$

отпечатава низ от цифри. Коя е четвъртата отпечатана цифра в този низ? ($\lfloor x \rfloor$ е цялата част на x .)

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) никое от тези

Решение. Програмата отпечатава последователно цифрите в записа на 2016 в бройна система с основа 4, започвайки от младшия разред, т.е. отзад напред. Имаме $2016 = 2^{11} - 2^5 = (2^6 - 1)2^5 = 111111_2 \cdot 100000_2 = 11111100000_2 = 133200_4$, а програмата е отпечатала 002331. *Отговор:* Г.

Коментар. Тук съществено се използва лесното представяне на 2016 в двоичен запис, откъдето без много изчисления се преминава към бройна система с основа 4.

2016, 11-12. А и Б последователно хвърлят зарче. Първо А, после Б, отново А, пак Б и т.н. Печели този, който пръв хвърли шестица. Каква е вероятността това да е А?

А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{7}{13}$ В) $\frac{4}{7}$ Г) $\frac{7}{12}$ Д) никое от тези

Решение. А печели, когато се падне шестица на нечетно хвърляне. Вероятността това да стане на първото е $1/6$. За да се падне 6 за първи път на третото хвърляне, трябва първите 2 пъти да не се е паднала шестица, а на третия път да се е паднала

– вероятността за това е $(5/6)^2 \cdot (1/6)$. За да се падне 6 за първи път на петото хвърляне, трябва първите 4 пъти да не се е падала шестица, а на петия път да се е паднала – вероятността за това е $(5/6)^4 \cdot (1/6)$. . . Вероятността да спечели А е $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11}$.

Отговор: Д.

Коментар. Тук се съчетават идеи от вероятности и анализ. Първоначално задачата беше формулирана за „игра“ на руска рулетка, но се появиха притеснения за евентуално лошо влияние върху учениците. Така формулировката ѝ облекче настоящите безлични *сиви одежди*.

2015, 9-12. При въвеждането на кои от началните данни
 А) 31 и 2015 Б) Sqrt[54] и Sqrt[24] В) Sqrt[27] и Sqrt[12]
 Г) Sqrt[10] и Sqrt[6] Д) Sqrt[50] и Sqrt[8]
 даденият по-долу фрагмент от програма ще отпечата числото 2015?

```
въведи a1;
въведи a2;
n := 2;
докато n < 2015 и an > 0 повтаряй
{ n := n + 1;
  an := |an-1 - an-2| }
отпечатай n.
```

(Командата Sqrt[] изчислява квадратния корен на числото в скобите; командата | | е обичайната абсолютна стойност; приемаме, че изчисленията се извършват точно – без закръгляне.)

Решение. Фрагментът реализира алгоритъма на Евклид за най-голямо съизмерващо число (НОД) на въведените данни. Ако съотношението на a_1 и a_2 е рационално число, алгоритъмът спира след съответния брой стъпки поради деактивиране на условието $a_n > 0$. При отговорите А, Б, В и Д този брой е най-много двуцифрен. От друга страна, при В съотношението на a_1 и a_2 е ирационално и алгоритъмът ще спре едва при деактивиране на условието $n < 2015$. *Отговор:* Г.

Коментар. Алгоритъмът на Евклид е добре известен още от 5. клас. Приложението му за ирационални числа е необичайно и изисква познания относно съизмеримост на величини, което е в пряка връзка с историческата поява на този алгоритъм.

2010, 9-12. Да си мислим, че винаги, когато е написана буквата x , тя може да се заменя с низове по някое от правилата:

(1) $x \longrightarrow 111x$ (2) $x \longrightarrow 11111x$ (3) $x \longrightarrow 111$

Например $x \xrightarrow{(2)} 11111x \xrightarrow{(1)} 11111111x \xrightarrow{(3)} 11111111111$.

Колко са низовете от една или повече единици, които **не могат** да бъдат получени, стартирайки от буквата x ?

А) 4 Б) 5 В) 6 Г) 7 Д) никое от тези

Решение. Възможните низове са с дължина $n = 3 + 3k + 5l$, където $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$. За $n \in \{1; 2; 4; 5; 7; 10\}$ те не са от определения вид. За $n \in \{3; 6; 8; 9\}$ уравненията $3k + 5l = 0 = 3 - 3$, $3k + 5l = 3 = 6 - 3$, $3k + 5l = 6 = 9 - 3$ имат решения

съответно $(k; l) = (0; 0)$, $(k; l) = (1; 0)$, $(k; l) = (0; 1)$, $(k; l) = (2; 0)$. За $n \in \{11; 12; 13\}$ уравненията $3k + 5l = 8 = 11 - 3$, $3k + 5l = 9 = 12 - 3$, $3k + 5l = 13 = 11 - 3$ имат решения съответно $(k; l) = (1; 1)$, $(k; l) = (3; 0)$, $(k; l) = (0; 2)$. За $n - 3 \geq 11$ решение на уравнението $n - 3 = 3k + 5l$ се получава от предните три с подходящо увеличаване на k . *Отговор:* В.

Коментар. Идеята за съчетаване на формални граматики с диофантови уравнения в състезателни задачи не е нова, но не ни е известно да се е появявала в наше състезание във формат *избираем отговор*.

2011, 9-12. Какво е написал известният автор **ფაბრეზიუზი ღებეზაძე**, работил в Преславската книжовна школа в края на IX и началото на X век?

- А) **ქრისტეშვილი** Б) **ქრისტეშვილი** В) **ქრისტეშვილი**
Г) **ქრისტეშვილი** Д) **ქრისტეშვილი**

Решение. Ясно е, че става въпрос за „О писменах“ („За буквите“). От изписването на *Черноризец Храбър* на глаголица установяваме как се изписват гласните, след което ги сравняваме в посочените варианти за отговор. *Отговор:* В.

Коментар. Задачата предполага умения в кодирането, но също познания за основното дело на Черноризец Храбър.

Вместо заключение. Образователната и изследователска програма „Черноризец Храбър“ (фиг. 5) поддържа страницата в световната мрежа www.math.bas.bg/ch. Броят на посещенията в тази страница от момента на създаването ѝ до декември 2016 доближава милион. Състезателните теми са достъпни за участниците, тъй като брошурките от Турнира си остават за състезателите. Наред с това в последните години редовно се отпечатва сборник с темите и решенията. Издават се и сертификати на английски език при условия, обявени на страницата. Колегите учители, техните ученици и родителите като правило са доволни от качеството на състезателните теми. Отправяните критични бележки са внимателно разглеждани от екипа ни, който постоянно полага усилия за усъвършенстване на работата си.



Фиг. 5: Логото на ОИП-ЧХ

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. ТАБОВ, Б. ЛАЗАРОВ, Е. КЕЛЕВЕДЖИЕВ. Първи есенен математически турнир „Черноризец Храбър“. Математика плюс. София, 1993.

- [2] Б. ЛАЗАРОВ. Двадесет и четвърти есенен математически турнир „Черноризец Храбър“, ИМИ-БАН, София, 2016.
- [3] Б. ЛАЗАРОВ, А. ВАСИЛЕВА. Възрастово-обособени разлики при работа по една тема. *Математика и математическо образование*, **45** (2016), 242–247.
- [4] Б. ЛАЗАРОВ. Задачите по комбинаторика и вероятности в турнира „Черноризец Храбър“. *Математика и информатика*, бр. 6 (2009), 48–54.
- [5] Б. ЛАЗАРОВ, И. КОРТЕЗОВ. Кодове и маршрути. *Математика и информатика*, бр. 2 (2011), 17–21.
- [6] Б. ЛАЗАРОВ, К. КЪНЧЕВ. Класически алгоритми в съвременно изложение. *Математика и информатика*, бр. 5 (2011), 52–57.
- [7] Б. ЛАЗАРОВ. Тестови задачи с много данни. *Математика и математическо образование*, **40** (2011), 428–432.
- [8] Б. ЛАЗАРОВ, И. КОРТЕЗОВ. Решаване на задачи с помощта на таблица. *Математика и математическо образование*, **41** (2012), 375–379.
- [9] А. ВАСИЛЕВА, Б. ЛАЗАРОВ. Изследване на влиянието на формално и вербално задаване на тестови единици в 3. и 4. клас. В Доклади на Юбилейна конференция „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“, посветена на 60 г. на проф. Сава Гроздев, 10–12 септември 2010, Бачиново, 344–350.
- [10] Б. ЛАЗАРОВ, А. ВАСИЛЕВА. Индекс на възрастовия фактор в темата за 5.–6. клас на XXV турнир „Черноризец храбър“. *Математика и математическо образование*, **46** (2017), 267–272.
- [11] Б. ЛАЗАРОВ, Б. САВОВА, И. КОРТЕЗОВ. Съпътстващо обучение на турнира „Черноризец Храбър“. *Математика и математическо образование*, **42** (2013), 406–411.
- [12] Б. ЛАЗАРОВ. Индивидуална образователна траектория – изследване на частен случай. *Математика и информатика*, бр. 3 (2012), 238–248.
- [13] Б. ЛАЗАРОВ, Т. ПЕТРОВА, А. ИВАНОВА-НЕДЕЛЧЕВА. Развитие на определящата поведението среда чрез образователната програма „Черноризец Храбър“. *Образование и технологии*, том 6 (2015), 229–237.
- [14] B. LAZAROV. A New Tournament in Bulgaria. *Mathematics Competitions*, **6**, No 1 (1993), 47–55.
- [15] E. KELEVEDZHIEV, B. LAZAROV. Organizing a Tournament for Students with Different Levels of Mathematical Knowledge. *Mathematics Competitions*, **8**, No 2 (1996), 32–47.
- [16] B. LAZAROV, J. TABOV, P. TAYLOR, A. STOROZHEV. Bulgarian Mathematics Competition 1992–2001. Canberra, AMT Publishing, 2004.
- [17] Б. ЛАЗАРОВ, Е. МИХАЙЛОВ. Турнир по математике и информатике „Черноризец Храбър“. Архангельск, КИРА, 2015.

Борислав Лазаров
 Институт по математика и информатика – БАН
 ул. Акад. Георги Бончев, б.л. 8, 1113 София
 e-mail: lazarov@math.bas.bg

TWENTY FIFTH ANIVERSARY OF CHERNORIZEC HRABAR MATH TOURNAMENT

Borislav Lazarov

The paper presents a retrospective view point to the *Chernorizec Hrabar* Math Tournament in Bulgaria.

Key words: multiple-choice competitions, Chernorizec Hrabar tournament, gifted education