

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2017
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2017
Proceedings of the Forty-sixth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 9–13, 2017

ЕВОЛЮЦИЯ НА ИДЕИ В ЗАДАЧИ
ОТ ТУРНИРА „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“

Борислав Лазаров

В статията са разгледани три серии задачи, включени в състезателните теми на турнира **Черноризец Храбър**. Дадени са коментари как от такава серия може да се формира система от задачи за провеждане на изследователско търсене.

Еволюция на идея. Математическите идеи еволюират. Даже на пръв поглед революционни идеи не възникват ex nihilo, а имат своите предпоставки в развитието на математиката. В математическото образование представянето на еволюцията на една идея има познавателно значение, но също така създава у обучаемите нагласа за задълбочено усвояване на определена тема, а понякога провокира и изследователски интереси. В цялостната концепция на Образователната програма **Черноризец Храбър** за работа с изявени ученици се включва и еволюционно развитие на математически идеи чрез система задачи. С прилагането на адекватен дидактически модел такава система задачи може да послужи за изграждане на индивидуална образователна траектория в средносрочен план. По-нататък в статията ще разгледаме примери, които илюстрират спецификите на възприетия в Програмата изследователски-ориентиран подход, явяващ се контрапункт на формата *задачи с избираем отговор* на състезанието **Черноризец Храбър**.

Две „оптимизационни“ задачи с комбинаторно обобщение. Първоначална конструкция за тестовите единици в тази секция се съдържаше в предложение от Боянка Савова за 23-ото издание на турнира **Черноризец Храбър**. В тази секция ще покажем еволюцията на идеята в серия задачи за различни възрастови групи [1]. Освен това ще дадем насоки за следващо разработване на подобни задачи.

2014-3,4.¹ Кутия, дълга 14 см и широка 1 см, е разделена на 14 квадратни клетки 1×1 см. В центъра на най-лявата клетка се намира бълхата Б. Първият скок на Б е 1 см и тя попада в центъра на съседната клетка. Всеки следващ скок тя увеличава с 1 см, попадайки в центъра на клетка от кутията. С колко най-малко хода Б може да попадне в най-дясната клетка?



А) 5 Б)² 6 В) 8 Г) 10 Д) никое от тези

¹Посочена е годината и класовете, за които е дадена задачата.

²С получерно ще отбелязваме верния отговор.

Решение. Скоковете надясно ще добавяме, а скоковете наляво ще изваждаме от номера на клетката. Интересуваме се от най-малък брой изваждания. Това става при $1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6$. Първите два скока са с $+1 + 2$; ако третият е $-$, то трябва да следват два с $+$ и имаме $1 + 2 - 3 + 4 + 5 = 9$. Следващият шести скок не води до най-дясната клетка. Ако третият и четвъртият са $+$, то имаме $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ и петият задължително е $-$; следващият шести скок не води до най-дясната клетка.

Коментар. Във възрастовите групи 3. и 4. клас този тип „оптимизация“ е познат на участниците в математически състезания от задачите за преливане. Обикновено в такива задачи се търси минимален брой преливания за преход от една в друга конфигурация на течност в съдове. Поради това за задачата имаше получени не малко верни отговори. Далеч сме от илюзията, че минималността е обосновавана – в тази възраст дедуктивните умения са много рядко срещани. По-скоро конкретно придвижване на Б е почувствано като минимално. От друга страна дискусии на такава тема е полезно да бъдат водени с изявените ученици в 3. и 4. клас.

2014-5,6. Кутия, дълга 14 см и широка 1 см, е разделена на 14 квадратни клетки 1×1 см. В центъра на най-лявата клетка се намира бълхата Б. Първият скок на Б е 1 см и тя попада в центъра на съседната клетка. Всеки следващ скок тя увеличава с 1 см, попадайки в центъра на клетка от кутията. С колко най-много хода Б може да попадне в най-дясната клетка?

А) 6 Б) 10 В) 12 Г) 14 Д) никое от тези

Решение. Най-дългият скок може да е 13 см (иначе бълхата излиза от кутията). Преместване с 13 скока става така

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12 + 13.$$

Коментар. В тази задача „оптимизацията“ е принципно различна: прави се оценка, след това се показва, че тя е достижима. Изявените ученици от възрастовата група 5.–6. клас се справят доста успешно с подобни разсъждения.

2014-7,8. Кутия, дълга 14 см и широка 1 см, е разделена на 14 квадратни клетки 1×1 см. В центъра на най-лявата клетка се намира бълхата Б. Първият скок на Б е 1 см и тя попада в центъра на съседната клетка. Всеки следващ скок тя увеличава с 1 см, попадайки в центъра на клетка от кутията. По колко начина Б може да попадне в най-дясната клетка?

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) никое от тези

Решение. Първите два скока са $+1 + 2$; ако третият е $-$, то трябва да следват два с $+$ и имаме $1 + 2 - 3 + 4 + 5 = 9$. Следващите ходове са еднозначно определени: $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12 + 13$. Ако третият е $+$, а четвъртият е $-$, то петият задължително е $+$ и оттук $1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6$ е едно решение; ако имаме -6 , то следва задължително $+7$, откъдето не получаваме решение и в двете ситуации $+8$ и -8 . Ако третият и четвъртият са $+$, то имаме $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ и следват задължително $(1 + 2 + 3 + 4) - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10$.

Коментар. Както се вижда от решението, тук става въпрос за синтез на идеите от първите две задачи. Освен това посочването на отговор в някаква степен гарантира, че задачата е решавана. Изследователски потенциал крият и трите формули-

ровки. Ученици с вкус към задълбочено разглеждане на идеите могат да извършат пресмятанията при различен брой клетки.

Изследователска задача 1. Кутия, дълга n см и широка 1 см, е разделена на n квадратни клетки 1×1 см. В центъра на клетка се намира бълхата Б. Първият скок на Б е 1 см и тя попада в центъра на съседната клетка. Всеки следващ скок тя увеличава с 1 см, попадайки в центъра на клетка от кутията. С колко най-малко хода Б може да попадне в най-дясната клетка? Да се разгледа въпросът за най-много ходове. Да се разгледат различни възможности за начална клетка.

Две гледни точки към една комбинаторна идея. В 25-ото издание на турнира *Черноризец Храбър* се появи серия задачи, в които бяха разработени две съществено различни гледни точки. Следващата задача и решение 1 към нея бяха предложени от Ивайло Кортезов.

2016-7,8. Колко са естествените числа, в записа на които няма други цифри освен 1 и 4 и имат сбор от цифрите 12?

А) 24 Б) 26 В) 50 Г) 69 Д) никое от тези

Решение 1. За да се получи число, в записа на което няма други цифри освен 1 и 4 и със сбор на цифрите $n + 1$, може да се припише отдясно цифрата 1 към число със сбор n или цифрата 4 към число със сбор $n - 3$ (за сбор от цифрите на едноцифрените числа считаме самите числа). Получаваме редицата 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, ..., в която всяко число след 4-ото е сбор на предното и по-по-предното, т.е. редицата $a_{n+1} = a_n + a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = 2$. Търсеното от нас число е 12-ото в редицата, т.е. 26.

Коментар. Предложеното решение с рекурентна редица е много подходящо за горните класове. Но за малки стойности на сбора от цифрите по-малките ученици имат достатъчно комбинаторни познания и умения, за да решат задачата. Ето какво имаме предвид.

Решение 2. За записа на число с описаното свойство има следните възможности: три цифри 4 – има 1 такова число; две цифри 4 и четири 1 – броят на тези числа е $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$; една цифра 4 и осем 1 – 9 числа; дванайсет цифри 1 – 1 число. Общо $1 + 15 + 9 + 1 = 26$ числа.

Така задачата „отиде“ в темата за 7.–8. клас. Комбинаторната идея за преброяване намери развитие в темата за 5. и 6. клас, където се появи облекчен вариант.

2016-5,6. Колко са естествените числа, в записа на които няма други цифри освен 1 и 4 и имат сбор от цифрите 10?

А) 14 Б) 16 В) 18 Г) 20 Д) никое от тези

Идеята за рекурентните редици не беше изоставена. Тази идея се комбинира с познатите числа на Фибоначи и в темата за 9.–10. клас се появи следната задача.

2016-9,10. Колко са естествените числа, в записа на които няма други цифри освен 1 и 2 и имат сбор от цифрите 12?

А) 144 Б) 36 В) 89 Г) 233 Д) никое от тези

Решение. За да се получи такова число със сбор на цифрите $n + 1$, може да се припише отдясно цифрата 1 към число със сбор n или цифрата 2 към число със сбор $n - 1$ (за сбор от цифрите на едноцифрените числа считаме самите числа). Получаваме редицата 1, 2, 3, 5, 8, ..., в която всяко число след 2-ото е сбор на предното и по-предното, т.е. редицата $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ (Фибоначи). Търсеното от нас число е 12-тото в редицата, т.е. 233.

Коментар. Поради по-големия брой случаи изброяването е времеемко и неподходящо за състезание с много ограничено време. Затова учениците, които се ориентират към рекурентни редици, получават предимство.

В темата за 11. и 12. клас идеята беше представена в следния модифициран вид.

2016-11,12. Колко са естествените числа, в записа на които няма други цифри освен 1 и 3 и имат сбор от цифрите 16?

А) 68 Б) 109 В) 169 Г) 237 Д) никое от тези

Решение. За да се получи такова число със сбор на цифрите $n + 1$, може да се припише отдясно цифрата 1 към число със сбор n или цифрата 3 към число със сбор $n - 2$ (за сбор от цифрите на едноцифрените числа считаме самите числа). Получаваме редицата 1, 1, 2, 3, 4, 6, ..., в която всяко число след 3-тото е сбор на предното и по-по-предното, т.е. редицата $a_{n+1} = a_n + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Търсеното от нас число е 16-тото в редицата, т.е. 277.

По този начин колегите, занимаващи се с подготовка на ученици за състезания, могат да проследят с възпитаниците си еволюцията на комбинаторните методи в различни възрастови групи. Математическият апарат на линейните рекурентни редици е част от обичайната подготовка на олимпийците. Но за учениците, имащи нагласа за изследователска работа, така предложената система задачи е интригуваща. Различни нови задачи могат да се формулират в две направления: като се изменя сборът на цифрите и/или като се сменят участващите цифри.

Изследователска задача 2. Колко са естествените числа, в записа на които няма други цифри освен 1 и $k \in \{2, 3, 4, \dots, 9\}$ и имат сбор от цифрите n ?

По-големите ученици могат да се поинтересуват и от асимптотичното поведение на търсения брой при $n \rightarrow \infty$.

Изследователска задача 3. Нека a_n е броят на естествените числа, в записа на които няма други цифри освен k и l и имат сбор от цифрите n . За кои числа α съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\alpha^n}$ и на колко е равна границата, когато не е 0?

Челен опит. Развитието на еволюционна система задачи от турнира *Черноризец Храбър* в изследователска ученическа дейност има своята история в два обучаващи експеримента: дългосрочен, с ученик в 11. клас, и краткосрочен, с ученически екип от 6. клас. Подробно описание на дидактическия модел и експерименталното обучение е публикувано в [2] и [3]. Тук само ще приведем системата задачи.

2010-3,4. Колко са числата, ненадвишаващи 10, които са едновременно сбор на две последователни естествени числа и сбор на три последователни естествени числа?

А) няма такива Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) повече от 3

Решение. Такова число е $9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$. Други няма: $1 + 2 + 3 = 6$ не е сбор на две последователни естествени числа, а $3 + 4 + 5 > 10$.

2010-5,8. Колко са числата, ненадвишаващи 2010, които са едновременно сбор на две последователни естествени числа и сбор на три последователни естествени числа?

- А) няма такива Б) не повече от 100 В) между 101 и 200
Г) между 201 и 300 Д) повече от 300

Решение. Такова число е от вида $n + (n+1) = 2n+1$, т.е. нечетно; също така от вида $(m-1) + m + (m+1) = 3m$, т.е. кратно на 3. Следователно търсените числа са от вида $6k + 3$, k – естествено число. Обратното също е вярно: $6k + 3 = (3k + 1) + (3k + 2) = 2k + (2k + 1) + (2k + 2)$. Броят на числата от този вид, ненадвишаващи 2010, е $\left\lfloor \frac{2010-3}{6} \right\rfloor > 300$.

2010-9,12. Едно число ще наричаме *сумарно*, ако е едновременно сума на две последователни естествени числа и сума на три последователни естествени числа. Относно коя операция множеството на сумарните числа е затворено, т.е. резултатът от операцията на всеки две сумарни числа е също сумарно число?

- А) събиране Б) изваждане В) умножение Г) деление
Д) никое от тези

Решение. Сумарното число е от вида $n + (n + 1) = 2n + 1$, т.е. нечетно; също така от вида $(m - 1) + m + (m + 1) = 3m$, т.е. кратно на 3. Следователно сумарните числа са от вида $6k + 3$ – естествено число. Обратното също е вярно: $6k + 3 = (3k + 1) + (3k + 2) = 2k + (2k + 1) + (2k + 2)$. За тях $(6k_1 + 3) \pm (6k_2 + 3) = 6(k_1 \pm k_2)$; $(6k_1 + 3) \cdot (6k_2 + 3) = 6(6k_1k_2 + 3(k_1 + k_2) + 1) + 3$; $k_1 < k_2 \implies (6k_1 + 3)/(6k_2 + 3) \notin \mathbf{N}$.

Коментар. Въвеждането на понятието *сумарно* за разглежданите числа е от особена важност за по-нататъшната еволюция на идеята. То лесно извиква в съзнанието конкретизацията *сумарно* $\leftrightarrow$ *2-3-сумарно*, при която се указва в явен вид свойството *числото е едновременно сума на 2 последователни естествени числа и сума на 3 последователни естествени числа*. Сега преходът *k-l-сумарно* идва без усилия, а обобщението *k-l-...-m-сумарно* е естествено и очаквано.

Заключителни думи. Самостоятелното навлизане в материята, представена в трите предишни секции, е по силите на повечето участници в турнира *Черноризец Храбър*. Те биха могли да формулират и решат подобни задачи и евентуално да разработят и представят проекти. Интересуващите се от компютърна математика могат да се развихрят в приложения на системи за компютърна алгебра. Например в рекурентните редици от секция 3 при $k \geq 3$ се получават характеристични уравнения от 3-та и по-висока степен, чието решаване на ръка е трудоемко или невъзможно.

Нашият адресат, обаче, е учителят, който има нагласа за изследователски ориентирано обучение. Еволюционното развитие на идеи в системи от задачи, каквито представихме тук, би мотивирало „състезателите“ да обърнат поглед към изследователския стил. Във възрастовите групи след 7. клас реален изследователски подход е осъществим при отделни изяви ученици и осигурява поле за изява на онези, които предпочитат спокойното и задълбочено занимание у дома пред еуфорията на

математическите състезания, където трябва да се решават *много* задачи за *малко* време. Такива ученици имат рефлексивни умения, но също имат нужда да ги развиват под професионалния поглед на учителя си.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. ЛАЗАРОВ. Двадесет и трети есенен математически турнир „Черноризец Храбър“, ИМИ-БАН, София, 2015.
- [2] Б. ЛАЗАРОВ. Индивидуална образователна траектория – изследване на частен случай. *Математика и информатика*, бр. 3 (2012), 238–248.
- [3] Б. ЛАЗАРОВ, Т. ПЕТРОВА, А. ИВАНОВА-НЕДЕЛЧЕВА. Развитие на определящата поведението среда чрез образователната програма „Черноризец Храбър“. *Образование и технологии*, **6** (2015), 229.

Борислав Лазаров
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Георги Бончев“ бл. 8
1113 София, България
e-mail: lazarov@math.bas.bg

EVOLVING IDEAS IN PROBLEM SERIES OF CHERNORIZEC HRABAR MATH TOURNAMENT

Borislav Lazarov

The competition papers of *Chernorizec Hrabar* Math Tournament in Bulgaria regularly include series of problems which present a general idea in evolution. The article presents the motivation of the competition paper designer to develop such kind of problem series. Some examples illustrate how the approach works.

Key words: multiple-choice competitions, Chernorizec Hrabar tournament, didactical modeling