

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2017
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2017
Proceedings of the Forty-sixth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 9–13, 2017*

**РАБОТА СЪС ЗАДАЧИ С ОТВОРЕН КРАЙ
И УЧЕБНИ СИТУАЦИИ
В ПОМОЩ НА ИЗСЛЕДОВАТЕЛСКОТО УЧЕНЕ***

Динко Цвятков

Въображението е ключът към разбирането. В часовете по математика учителят трябва да се стреми да онагледява пред учениците преподавания учебен материал. С подръчни материали, с динамичен софтуер той трябва да обрисова математическите факти и правила така, че те да станат достъпни и разбираеми за по-голямата част от учениците му.

Днес постиженията на математиката се използват в ежедневната професионална практика не само от математици, физици или инженери. Те са в основата на технологиите, които се ползват както от художници, фотографи, дизайнери, така и от лекари и финансисти и др.

Според Джон Дюи „основният, най-сериозен и винаги актуален проблем на образованието е проблемът за откриването и организирането на формите на дейност, които са най-близки, най-подходящи, най-пригодни за развитието на подрастващите, които са най-обещаващи като подготовка на обществените отговорности на възрастните и които същевременно имат максимално влияние за формирането на навици за проникателно наблюдение и последователни заключения“ [1].

Днес в часовете по математика все повече се използва изследователският подход [3–5]. Той се основава на конструктивисткия подход към обучението, който препоръчва всеки обучаем да следва собствен път за изграждане и организиране на знанията си. Особено важно е да се знае „как да се учи“, а не да се запаметява някаква информация. Този активен подход към ученето и преподаването поставя учениците в центъра на учебния процес и предполага самостоятелен избор за посоката на учене. Обучаемите развиват знания и разбирания за научните идеи, както и разбиране за това как учените изследват естествения свят [9]. Чрез него учениците се насърчават да бъдат креативни, активни и да превърнат идеите си в действие. Тук те развиват способности да планират, организират и ръководят работата си. Тези практически умения са важни не само за часовете по математика, но и за целия им съзнателен живот, който е неотменна част от общия когнитивен процес.

Но как можем да насърчим ученето с разбиране в часовете по математика? Как учениците ни да могат да видят математиката в заобикалящия ги свят? Как можем

***Ключови думи:** динамичен софтуер, изследователско учене, задачи с отворен край, изследователски подход, учене чрез откриване, GeoGebra, Elica.

да направим нашите класни стаи центрове на математическото знание? Отговор дава американският математик Пол Халмош, който казва: „Да не се преподават само факти, а да се стимулира действие“. Математиката не трябва да се свежда само до механично прилагане на правила. Тя е висша творческа дейност, изискваща специфични мисловни умения, специфични методи и не на последно място – всестранен опит. Но тази характеристика на математиката, отразяваща нейната истинска същност, обикновено не се популяризира достатъчно в българските училища. Все още се обръща прекомерно внимание на формалните методи за смятане и заучаването на определени правила [2, 15, 16].

За постигане на образователните и възпитателните цели, които сме си поставили, въвеждайки изследователския подход в учебните часове по математика, използваме разнообразни педагогически средства. Една най-обща тяхна класификация е според характерните им особености: личностни, класически и технически [7].

- Личностните педагогически средства са свързани с личността на учителя. Качественото преподаване зависи от това доколко учителят успява да увлече учениците си. Ако той преподава с желание и търпение, учениците му ще постигнат успехи.
- Класическите средства са двумерни или тримерни изображения и модели на математически обекти. Учениците ми в 6. клас с помощта на подръчни материали успяха да изработят триъгълни и четириъгълни пирамиди, върху които построиха апотемата и височината на пирамидата.
- Техническите средства са използваните в процеса на обучение технически устройства. В съвременния си урок от тях най-често се използват таблети, мултимедия, смартфони. С помощта на динамичен софтуер като GeoGebra, Elica и др. се създават динамични виртуални модели. Те са изключително полезни в работата на учителя, защото му помагат да онагледява, да изследва, да постулира. С тяхна помощ се засилва интересът към изучаването на математиката като наука.

Задачи с отворен край и учебни ситуации в помощ на изследователското учене. Ключова дефиниция според Петер Баптист: *Задачата е с отворен край, когато учениците са получили правото да работят самостоятелно, от тях се очаква и им е позволено да работят самостоятелно по дадена задача* [2, 15, 16].

Въпроси, които пораждаат задачите с отворен край:

- Каква е дадената ситуация?
- Как да започна и какво да направя?
- Как да интерпретирам резултата?

Задачите с отворен край се характеризират с въпроси, които дават в резултат различни, вероятно еднакво валидни отговори. Разликите стават предмет на обсъждане при работата по задачата и в клас. Баптист дефинира задачите с отворен край и в смисъла на техните противоположности – задачите със затворен край. Задачите със затворен край съдържат всички необходими данни. Процесът на решаването им е или очевиден, или ясно предписан.

Уроците в клас придобиват по-реалистична окраска и всеки ученик може да работи по задачата по начин, отговарящ на неговите индивидуални умения и знания, като създава подходи с отворен край:

- ✓ Разширете формулировката на задачата, без да задавате тясно скроени въпроси, дайте възможност за поява на нейни варианти и различни подходи към решението.
- ✓ Накарайте учениците да се ангажират със съдържанието, лежащо в основата на представения проблем.
- ✓ Поощрете учениците да развият по-силен интерес към различните математически понятия.

Отново в [2] Балтист разглежда целите при ситуации с отворен край:

- ✓ Учениците да получат собствен поглед върху представената им ситуация, като подберат, придобият и преценят информацията.
- ✓ Да развият ситуативни въпроси или предположения.
- ✓ Да изследват математически процеси и пътища, за да отговорят на зададените въпроси или да валидират предположенията.
- ✓ Да обменят прозренията и знанията си с останалите си съученици.
- ✓ Учениците намират и си записват допълнителните въпроси във връзка със зададената ситуация.

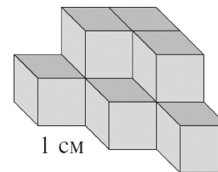
След като учениците последователно се запознаят с подхода с отворен край, учителят може да промени метода в зависимост от постигнатото равнище на резултати и умения. Въпросите от страна на учителя постепенно намаляват. Задача на учителя е да предизвика любопитство у учениците си. Това означава, че ученикът трябва да се научи да задава подходящи въпроси.

Пример 1. Да се намерят размерите на куб, в който трябва да се съберат 1000 сачми, всяка с диаметър 1 мм. (Задачата е давана на учениците в 5. клас.)

- ▷ Практически указания: Учениците трябва да определят формата на сачмата и сами да потърсят какво е диаметър. За целта те могат да използват всички налични ресурси, с които разполагат.

Пример 2. Определете обема и лицето на дадената фигура (Задачата е давана на изходно ниво в 5. клас):

От 28 ученици, явили се на изходното ниво, лицето на фигурата успяха да намерят само 2 ученици, а обема – 15. Учениците могат с помощта на приложението Cubix Editor от компютърната програма Elica да генерират свои варианти, на които да намерят решенията.



Има редица файлове от Виртуалния училищен кабинет по математика, които създават идеалната изследователска среда.

При решаването на следващата задача, някои ученици проявиха творчески подход.

Пример 3. Преместете M , N , P и Q в динамичната конструкция така, че да се получи развивка на правоъгълен паралелепипед. За получената развивка запишете дължините на MN , NA , BP и PQ (http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html_old/d16100.html) [10–13].

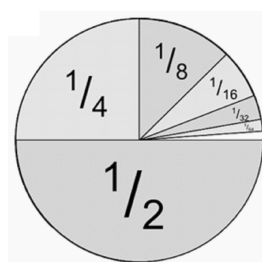
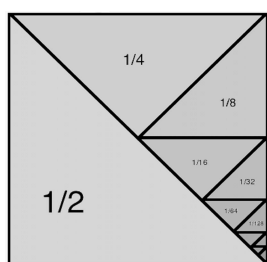
Задачата на пръв поглед се стори лесна на всички. Голяма част от учениците имаха инсталирана програмата GeoGebra на телефоните си и веднага започнаха да търсят решението. Тези, които нямаша такава възможност, получиха разрешението да ползват учителския компютър, но условието беше с до три премествания да получат развивката. Най-много ни впечатли Иванина, която изключително бързо



с подръчни материали изработи хартиена развивка по-показания начин и първа успя да намери дължините на отсечките. Децата в края на часа споделиха, че задачи от такъв отворен тип са интересни и полезни за тях.

Пример 4. Даден е квадрат по-показания начин. Учениците от 5. клас виждат, че лицето на квадрата може да бъде разделено на триъгълници, лицето на които е рав-

но на част от лицето на квадрата. Тук ситуацията е идеална за въвеждане на част от цяло. Предварително отделните триъгълници могат да бъдат изрязани и с тях да бъде построен квадратът. След това всеки един триъгълник да се свърже с дробта, която отговаря на частта от лицето на квадрата [8].

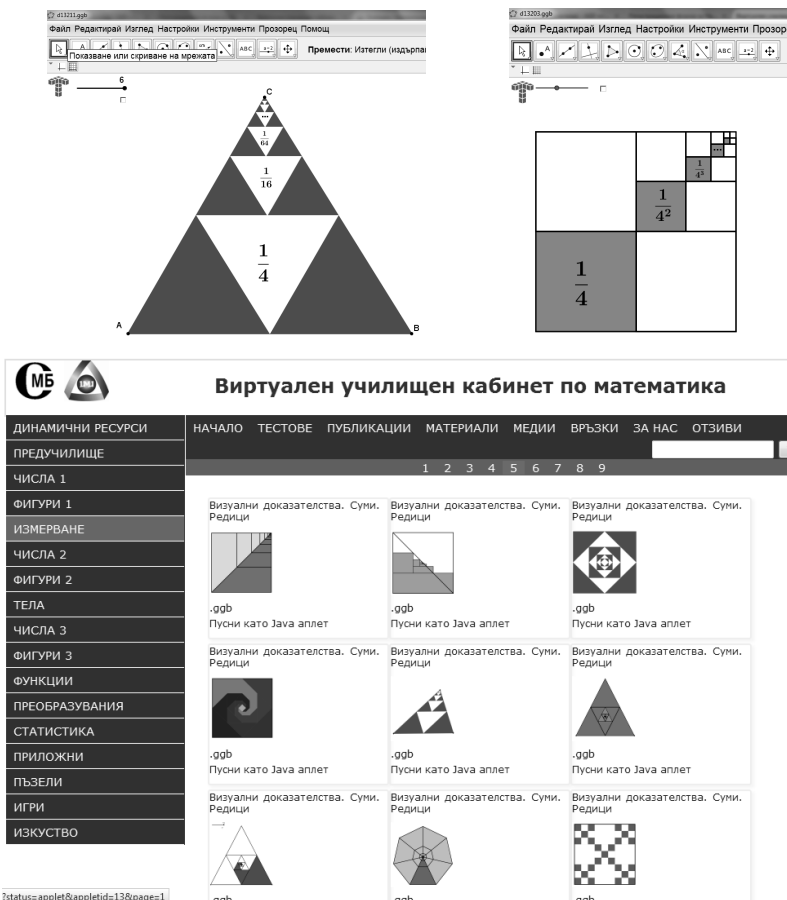


В 6. клас тази ситуация е полезна при въвеждане на понятието степен и по-специално за геометрична интерпретация на това понятие. В 11. клас тази ситуация е полезна за онагледяването на геометрична прогресия и сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия.

Аналогична ситуация може да имаме и като използваме кръг. Ситуацията може леко да бъде променена, ако използваме равностраничен триъгълник или отново квадрат.

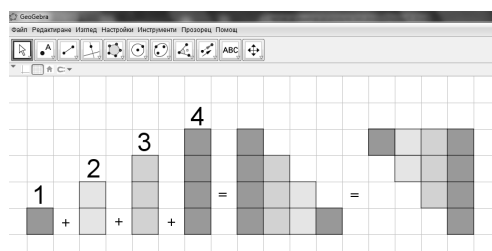
Във виртуалния училищен кабинет по математика има динамични файлове, с които се онагледява сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия [10].

Кое беше полезното при разиграването с динамичните файлове? И малки, и големи безпроблемно казваха каква част от лицето на големия триъгълник са лицата на белите триъгълници и аналогичната ситуация при квадрата. И малки, и големи сами стигнаха до извода, че сборът от лицата на белите триъгълници и на сивите квадрати е $\frac{1}{3}$ от лицето на съответната геометрична фигура. С 11. клас дадохме и математическата обосновка за сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия.

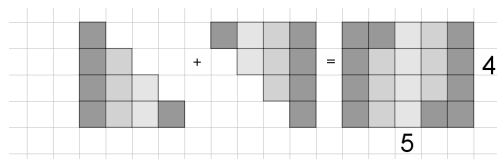


Във виртуалния училищен кабинет има още подобни файлове, които са идеални за онагледяване на числови редици.

Пример 5. Геометрична интерпретация на сума на Гаус. В 5. и 6. клас много често давам задачата: *Пресметнете рационално сбора на числата от 1 до 100.* След като учениците дадат верния отговор, обикновено разказвам приказката за малкия Гаус. С помощта на GeoGebra правя следната ситуация:



Децата бързо се ориентираха в ситуацията и пожелаха да съберем двете фигури.



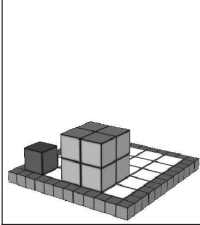
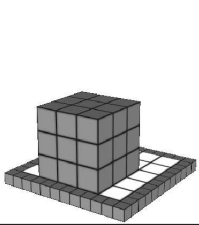
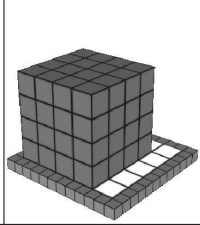
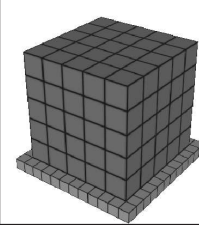
След като ги събрахме, учениците установиха, че броят на квадратчетата е два пъти по-голям и че сумата им трябва бъде два пъти по-малка. Опитаха се да запишат тази зависимост на езика на математиката, но срещнаха затруднения. Накрая заедно достигнахме до формулата на Гаус за сума на редица:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Аналогична ситуация е тази, в която трябва да докажем следната зависимост:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2.$$

В 11. клас учениците използваха метода на математическата индукция и доказаха формулата за тази сума. Учениците от 5. и 6. клас не са изучавали този метод и затова използвах следния подход. Казах им, че разполагат с 225 еднакви кубчета със страна 1 см. Първата задача беше да подредят кубчетата под формата на *квадрат*. Тази задача не ги затрудни, защото използваха разлагане на множители и лесно стигнаха до решението, че страната на квадрата е 15 см. Втората задача бе с дадените 225 кубчета да построят кубове, страните на които са последователни естествени числа. С помощта на динамичния софтуер Elica и неговото приложение Cubix Editor разиграхме дадената ситуация. Тук учениците преброиха съответния брой кубчета:

			
9 кубчета	27 кубчета	64 кубчета	125 кубчета

Общата сума $1+8+27+64+125=225$. Изводът, който направиха беше, че могат да се направят 5 куба от наличните кубчета, с дължини на страните последователните естествени числа 1; 2; 3; 4; 5. Накарах ги да проверят тази сума има ли нещо общо с дължината на квадрата в първата част от задачата. Веднага казаха, че сборът на тези числа е 15. По този начин изведохме равенството

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2.$$

Показах им и по-общия вид на това равенство:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2,$$

като направихме препратка към формулата на Гаус.

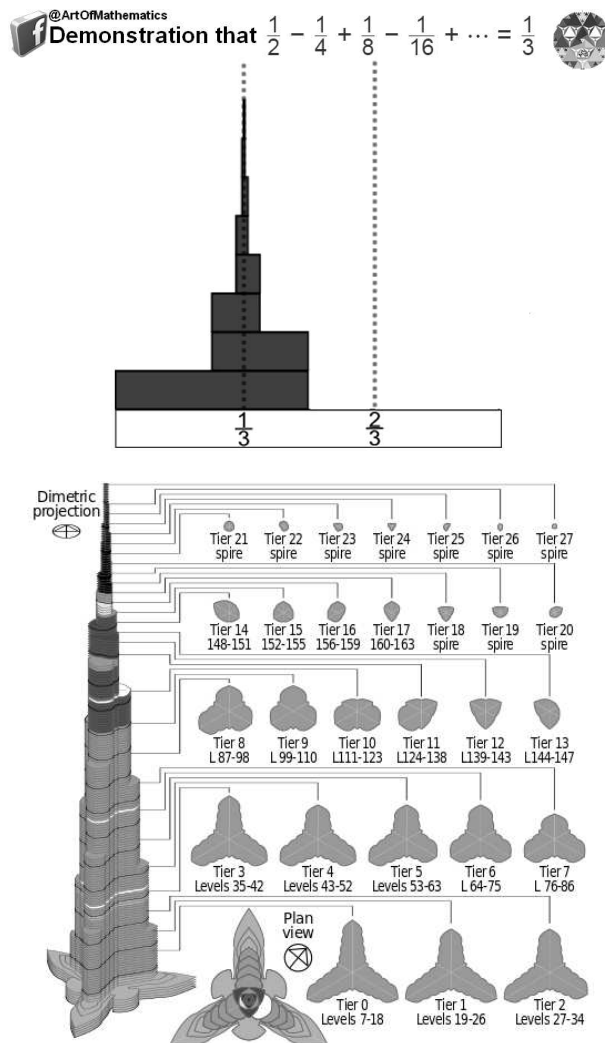
В интернет пространството намерихме следната илюстрация [17]:

Какво ме впечатли? Тя беше уникална илюстрация на разлика на две безкрайно намаляващи геометрични прогресии. Какво впечатли учениците? Оцветената фигура изключително много приличаше на най-високата сграда в Дубай. Предизвикателството към тях беше да намерят има ли числова редица в конструкцията на тази сграда. Резултатите не закъсняха. Намериха снимка, която показваше елементи с формата на буквата Y. Откриха още, че в подкрепа на безпрецедентното нарастване на сградата, инженерите разработват една нова структурна система, която се състои от едно шестоъгълно ядро, подсилено от три стълба, които са под формата на буквата „Y“. Тази структурна система позволява на сградата да се укрепи странично и да я предпазва от усукване.

Тези елементи с нарастване на височината намаляваха своите размери, както е показано на долната илюстрация.

Характерни особености на ситуацияите с отворен край.
Ситуациите с отворен край [2]:

- ✓ обикновено са силно мотивиращи;
- ✓ могат да бъдат много правдоподобни;
- ✓ дават възможност на учениците да съставят въпроси и задачи самостоятелно;
- ✓ карат учениците да се изразяват разбираемо;
- ✓ стимулират обвързването със знанията, които учениците имат по други училищни предмети;
- ✓ дават възможност на учениците да решават задачи със собствени стратегии чрез пътища, които са избрали самостоятелно.



Предимства на работата по метода на отворения край при преподаването на математика според П. Баптист [2]:

- ▷ Ученици, работещи по ситуации с отворен край, правят повече от един опит да вникнат в същността на задачата за разлика от онези, които работят по традиционните задачи;
- ▷ При работа по въпроси с отворен край учениците развиват умение да задават различни въпроси. Те конструират и проследяват различни проблеми в зависимост от вече придобитите умения, интереси и способности. Учениците откриват различни подходи и възможности за достигане до решение. Това допринася за естествената диференциация;
- ▷ Когато учениците се занимават с традиционни задачи, можем да очакваме най-много отговорите им да бъдат или „100% верни“, или „100% грешни“. При задачи с отворен край учителите могат да очакват „частично верни“ решения;
- ▷ Решаването на традиционни математически задачи често предизвиква т. нар. „капитански синдром“. Контрапродуктивните пътища се срещат много по-рядко, когато учениците работят по задачи с отворен край;
- ▷ Какво е „капитански синдром“? През 1989 г. книгата „На колко години е капитанът?“ от Стела Барък предизвика вълнения. Седемдесет и шест от деветдесет и седем второкласници и третокласници „решиха“ задачата: „На един кораб има 26 овце и 10 кози. На колко години е капитанът?“ Обичайният отговор беше – 36!

Задача от подобен тип дадох в час на ученици в 5. клас, за да провокирам вниманието на учениците. Условието е следното: „Ти си капитан на кораб. На кораба пътуват 200 пасажери, като $\frac{1}{3}$ от тях са деца. На колко години е капитанът на кораба?“. Масовият отговор беше $66\frac{2}{3}$ години. На дъската изписах с думи условието на задачата, но отговорът от страна на учениците беше същият и изненадата им бе голяма, че това не е верният отговор. Изненадаха се, като казах, че верен отговор е 42. Тогава попитаха дали има и други верни отговори. Аз отговорих, че 12 също е верен отговор, защото всички са на толкова години. Изводът от такива задачи е, че учениците обикновено свързват задачите по математика само с определен брой пресмятания и рядко разчитат правилно условието на задачата.

В заключение е важно да се каже, че не се цели замяна на всички традиционни задачи в часовете по математика с такива с отворен край или пък работа изключително със ситуации с отворен край. За мен е от значение да разширя обсега на методите и похватите, с които преподавам учебното съдържание. Богатството от знания, методи и подходи, които притежава учителят, трябва да достига до учениците му. Във всеки свой час той трябва да им дава възможност да мислят, да се изказват, да формулират хипотези. Трябва да развива математическата им грамотност, за да няма изненади на изследвания по формата на PISA или след националното външно оценяване. Рутинните задачи запазват значението си за практикуването и усвояването на определени процедури, модели и умения. Задачите с отворен край са по-близки до живота. С помощта на тези задачи учениците могат да покажат дали са в състояние да приложат придобитите знания без помощта на учителя си [2, 6, 14].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дж. Дюи. Как мислим, ИК Минерва, София, 2002.
- [2] П. БАПТИСТ, К. МИЛЕР, Д. РААБ. Към нов подход в математическото образование. Регалия 6, София, 2012. www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/SINUS_Bg-ver4.pdf
- [3] П. КЕНДЕРОВ. Иновации в математическото образование: Европейски проекти InnoMathEd и Fibonacci. *Математика и математическо образование*, **39** (2010), 63–72.
- [4] П. КЕНДЕРОВ, Е. СЕНДОВА. Изследователски подход в образованието по математика. Регалия 6, София, 2013.
- [5] А. ПРОТОПСАЛТИС, Е. СТЕФАНОВА. Въведение в изследователското обучение (Inquiry-Based Learning, IBL), www.portal.ou.nl.
- [6] Е. СЕНДОВА, Т. ЧЕХЛАРОВА. Общото в различията или Да влезеш в ролята на учен. *Математика и информатика*, бр. 5, (2011), 17–29,
- [7] Т. ЧЕХЛАРОВА. Педагогически средства за математическото образование. е-сп. *Педагогически форум*, Тракийски университет, ДИПКУ, Стара Загора, бр. 1, 2013.
- [8] Т. ЧЕХЛАРОВА, Е. СЕНДОВА. Необикновено за обикновените дробни – изследвания с динамични конструкции, Макрос, София, 2012.
- [9] R. D. ANDERSON. Reforming science teaching: What research says about inquiry? *Journal of Science Teacher Education*, **13**, No 1 (2002), 1–12.
- [10] Т. СЕНЛАРОВА, Г. ГАЧЕВ, П. КЕНДЕРОВ, Е. СЕНДОВА. A Virtual School Mathematics Laboratory. V-та Национална конференция по електронно обучение, Русе, 16–17.06.2014, 146–151.
- [11] <http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/>
- [12] <http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/>
- [13] http://vivacognita.org/_/viva-math/monthly-problem/
- [14] <http://keycomath.eu/>
- [15] sinus.uni-bayreuth.de/math/ISB_SINUS_Bavaria.pdf
- [16] www.sinus-transfer.eu
- [17] www.artmathematics.com

Динко Цвятков

Средно общообразователно училище „Иван Вазов“

ул. „Ген. Гурко“ № 102

6001 Стара Загора, България

e-mail: dinko_cvetkov@abv.bg

WORKING WITH OPEN-ENDED TASKS AND LEARNING SITUATIONS IN SUPPORT OF INQUIRY BASED LEARNING

Dinko Tsvyatkov

Imagination is the key to understanding. In the math lessons the teacher should strive to illustrate the material he teaches in front of his students. With the available materials, with dynamic software he should describe a mathematical facts and rules so that they become accessible and understandable to the majority of his students.

Key words: dynamic software, inquiry-based learning, open-ended tasks, IBL, learning by discovery, GeoGebra, Elica.