

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025

*Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025*

**TRAINING ON HAMMING CODE WITH THE HELP OF
DIDACTIC TOOLS – METHODOLOGICAL AND
HISTORICAL ASPECTS**

Daniel Denev

Faculty of Technical Sciences

Konstantin Preslavsky University of Shumen, Shumen, Bulgaria

e-mail: d.denev@shu.bg

Though the teaching of Hamming codes has not lost its relevance and remains an essential part of the error control codes theory, it is a tool without which modern communication and computer science students can hardly be prepared. This abstract is a survey of the historical development of Hamming codes with a focus on the role of Richard Hamming and the post-Richard Hamming periods in this respect. Their close connections to the error-free transmitting of data and the storage of data in the digital-era are examined. Furthermore, methods are presented to teach such a complex material using didactic tools for the successful development of the students. The most important point of the study is the training through innovative disciplines, such as data transmission. The main goal is to become a mass practice in universities and schools, so that it is not only a novelty, but also to be a motivation for undertaking practical projects.

Keywords: Hamming codes, didactic tools, data transmission

**ОБУЧЕНИЕ ПО КОД НА ХЕМИНГ С ПОМОЩТА НА
ДИДАКТИЧНИ ИНСТРУМЕНТИ – МЕТОДОЛОГИЧНИИ
ИСТОРИЧЕСКИ АСПЕКТИ**

Даниел Денев

Факултет по технически науки,

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“, Шумен, България

e-mail: d.denev@shu.bg

Въпреки че преподаването на кодове на Хеминг не е загубило своята релевантност и остава съществена част от теорията на кодовете за контрол на грешките, то е инструмент, без който съвременните студенти по комуникации и компютърни науки трудно могат да бъдат подготвени. Това резюме е преглед на историческото развитие

<https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.103-108>

* Тази статия е разработена в рамките на проекти № РД-08-133/02.02.2024 и № РД-08-110/31.01.2024 по Фонд научни изследвания на ШУ „Епископ Константин Преславски“ за 2024.

2020 Mathematics Subject Classification: 94B05, 94B99, 97U50, 68N99.

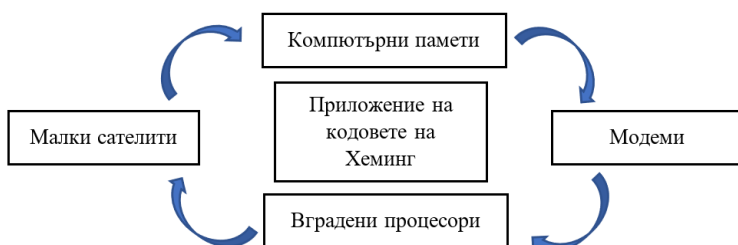
на кодовете на Хеминг с акцент върху ролята на Ричард Хеминг и периодите след него. Разгледани са тесните връзки с предаването на данни без грешки и съхранението на данни в цифровата ера. Освен това са представени методи за преподаване на такъв сложен материал с помощта на дидактически средства за успешното развитие на ученици и студенти. Най-важният момент от проучването е обучението чрез иновативни дисциплини, като тази по предаване на данни. Основната цел е да се превърне в масова практика в университетите и училищата, така че да не е само новост, но и да присъства като мотивация за предприемане на проекти за практически упражнения.

Ключови думи: кодове на Хеминг, дидактически средства, предаване на данни

Въведение. Кодовете за откриване и корекция на грешки играят ключова роля в съвременния дигитален свят. Тази статия представя компютърна дидактична програма за обучение по код на Хеминг, която улеснява разбирането на концепцията за корекция на грешки чрез интерактивни инструменти. Ще бъдат разгледани методологични аспекти и връзки с историческите методи на обучение. Обучението по теория на кодовете е ключов елемент в подготовката на специалисти по информационни технологии и комуникации. Кодът на Хеминг, създаден през 1950 г. от Ричард Хеминг, е сред първите практични методи за откриване и корекция на грешки. Той намира приложение в широк спектър от области, включително комуникационни мрежи, цифрова електроника и съвременни системи за съхранение на данни. През последните десетилетия използването на компютърни технологии в обучението открива нови възможности за ефективно преподаване на този сложен материал. Модерните студенти, израснали в ерата на цифровите технологии, предпочитат интерактивните методи на обучение пред традиционните. Традиционният подход често затруднява студентите в усвояването на преподавания материал. Въвеждането на интерактивни симулационни програмни модели в образователния процес позволява на студентите да възприемат материала по по-удобен и привлекателен за тях начин. Един от основните приоритети на университетите днес е развитието на съвременно образование чрез внедряване на интерактивни образователни софтуерни инструменти, които предоставят на студентите гъвкавост да учат по всяко време, на всяко място и чрез всяко интерактивно устройство. [1, 3, 5, 6]

Теоретична основа на кода на Хеминг. Кодът на Хеминг представлява един от най-известните методи за корекция на единични грешки. Математическата му основа се базира на използването на проверочни разряди за откриване и коригиране на грешки. Основната идея на кода на Хеминг е да добавя излишна информация към данните, която позволява на системата да открива и коригира единични грешки. Алгоритъмът включва изчисляване на проверочни битове, които осигуряват идентификацията на грешките в предаваната информация. Например, при кодиране на 4-битов блок се добавят 3 проверочни бита, които осигуряват възможност за корекция на всяка единична грешка. Областите на приложение на кодовете на Хеминг са посочени на фиг. 1.

Методи на преподаване по код на Хеминг. Традиционните методи на преподаване разчитат на теоретични обяснения и решаване на примери на дъската. Модерните технологии обаче предлагат значителни предимства чрез използването



Фиг. 1. Приложение на кодовете на Хеминг

на интерактивни симулации и програми за визуализация. Например, компютърната програма за код на Хеминг позволява на студентите да виждат процеса на кодиране и декодиране в реално време, като визуализацията и интерактивните упражнения служат за подобряване на разбирането. Съчетаването на теоретични и практически упражнения повишава ефективността на обучението.

Код на Хеминг. Кorigиращ групов (n, k) код, в който матрицата на проверките $M(n, k)$ има $r = (n - k)$ реда и $(2r - 1)$ стълба. Информационните и контролните разряди са разделени и може да се посочи мястото им в кодовата комбинация. Всички r -разрядни двоични последователности са ненулеви – $d_0 = 3$. Може да откриват двойни грешки. Може да изправят всички единични грешки. Кorigиращото число указва номера на изкривеният елемент в кодовата комбинация. Броят на разрядите на кorigиращото число е r . За да може да се посочи всеки сгрешен елемент, трябва: $r > \log_2 (n + 1)$.

Формиране на разряд. Тези елементи се формират в предавателя при предаване на кодовата комбинация. Оригиналната поредица битове е: $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots$,

Контролните разряди се разполагат на 1, 2, 4, 8.... позиции в предаваната кодова комбинация. Броят на контролните битове се определя от: $r = n - k$ и $r > \log_2 (n + 1)$

Контролните битове се получават:

$$b_1 = a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} \oplus a_{13} \dots,$$

$$b_2 = a_2 = a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \dots,$$

$$b_3 = a_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \dots,$$

$$b_4 = a_8 = a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \dots,$$

Предаваната поредица битове (кодовата комбинация) е: $a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5$

Предавана поредица	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
Информационни и кодови елементи	b_1	b_2	x_1	b_3	x_2	x_3	x_4	b_4	x_5	x_6	...

Кorigиращо число на Хеминг. Получаваната поредица битове (кодовата комбинация) е: $a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \dots$

Кorigиращото число (r) показва кой бит е сгрешен при предаването и трябва да се инвертира.

$$r = E_r E_{r-1} \dots E_2 E_1$$

$$E_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} \oplus a_{13} \oplus a_{15} \oplus a_{17} \oplus a_{19} \oplus a_{21} \dots,$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus a_{18} \oplus a_{19} \oplus a_{22} \dots, \\
E_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{20} \oplus a_{21} \oplus a_{22} \dots, \\
E_4 &= a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus a_{24} \oplus a_{25} \dots, \\
E_5 &= a_{16} \oplus a_{17} \oplus a_{18} \oplus a_{19} \oplus a_{20} \oplus a_{21} \oplus a_{22} \oplus a_{23} \oplus a_{24} \oplus a_{25} \dots, \\
E_6 &= a_{32} \oplus a_{33} \oplus a_{34} \oplus a_{35} \oplus a_{36} \oplus a_{37} \oplus a_{38} \oplus a_{39} \oplus a_{40} \oplus a_{41} \dots,
\end{aligned}$$

Във всяка последователност от елементи, обхващани от една проверка, трябва да влиза само един контролен елемент – елементът a_1 участва само в E_1 , a_2 – само в E_2 , a_4 – само в E_3 и т.н. Тоест всеки първи елемент е контролен, тъй като той участва само в тази проверка. Тези елементи се формират при получаване на кодовата комбинация в приемника. [3, 5]

Практическо приложение на дидактичната програма. Дидактичната програма за код на Хеминг включва модули за генериране на кодове, симулация на грешки и автоматична корекция. Един от примерите в програмата е задачата за предаване на бинарна последователност с предварително дефинирани проверочни битове. Студентите могат да симулират добавянето на грешки в предаваната последователност и да проследят процеса на корекция. Програмата е изключително полезна за курсове, включващи обучение по дигитална електроника и телекомуникации, тъй като тя предоставя нагледен пример за приложение на теоретичните знания в реални ситуации. Приложението е проектирано за обработка на информационни комбинации с дължина до 26 бита в режим на кодиране и до 32 бита в режим на декодиране. То е разработено с помощта на програмния език Python, като за изграждането на отделните му модули са използвани специфични контекстуални библиотеки. Потребителският интерфейс на приложението е реализиран в два езикови варианта: български (BG) и английски (EN).

$$H_{S_{12345678}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_{C_{1234}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Фиг. 2. Внедрена матрица за построяване на кодовете на Хеминг

$$\left\{ \begin{aligned} C_4 &= S_5 \oplus S_6 \oplus S_7 \oplus S_8 \\ C_3 &= S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus S_8 \\ C_2 &= S_1 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus S_6 \oplus S_7 \\ C_1 &= S_1 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_5 \oplus S_7 \end{aligned} \right.$$

Фиг. 3. Внедрена система от уравнения за кодиране/декодиране

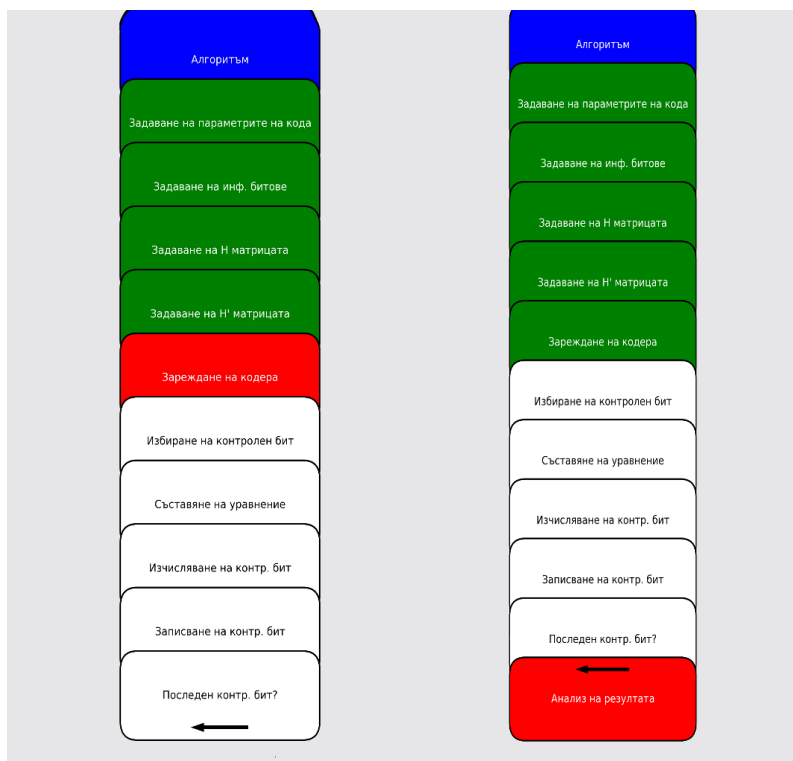
Програмата функционира в два основни режима – кодиране и декодиране, и е структурирана в три основни компонента: HCmat, Algorithm и Statistics.

Компонентът HCmat представлява основния модул на приложението, отговорен за изпълнението на основната функционалност. В процеса на работа с приложението всяка извършена стъпка подлежи на валидиране, като при установяване на грешка се генерира съобщение за нея. Преходът към следващата стъпка е възможен единствено след успешно изпълнение на текущата стъпка или въвеждане на коректна стойност. [2, 3]

Компонентът Algorithm изпълнява помощна роля, като предоставя визуализация на последователността от действия, необходими за решаване на задачата. Блокова-

та схема е интерактивна, като при избиране на конкретна стъпка се извежда информацията относно необходимото действие за изпълнението ѝ. За по-добра визуална ориентация приключените стъпки се маркират чрез отцветяване.

Компонентът *Statistics* е предназначен за събиране на данни за работния процес, включително време на взаимодействие със симулационната система (чрез таймер), брой допуснати грешки и история на тези грешки. [4, 7, 11, 12]



Фиг. 4. Програма в режим кодиране и декодиране

Заклучение. Представена е интерактивна система за изучаване на кодовете на Хеминг, която позволява симулиране на процесите на кодиране и декодиране. Системата е предназначена да подпомогне студентите при изучаването на процесите на кодиране (до 28-битови информационни комбинации) и декодиране (до 32-битови кодови комбинации), като същевременно служи като инструмент за практическо обучение и задълбочено изучаване на теорията на кодирането. Разработена с обучителна цел за специалности, свързани с комуникационните системи и технологии, системата предлага три режима на работа – ръчен, стъпков (стъпка по стъпка) и автоматичен. Тези режими осигуряват по-ефективно усвояване на концепциите, свързани с кодовете на Хеминг. Интерактивният модул *Algorithm* предоставя ясен и структуриран поглед върху всички операции в системата, което улеснява работата със средата. Допълнителна функционалност е налична чрез модула *Statistics*, който събира информация за времето за решаване на задачи, броя и характера на

допуснатите грешки, както и историята на грешките. Тази информация позволява на преподавателите да проследяват напредъка на студентите и да идентифицират често срещаните трудности, за да осигурят по-насочена помощ при обяснението на сложни концепции. Интерактивната система е полезна не само за студентите, но и за преподавателите, тъй като подпомага визуализацията и разяснението на сложни теоретични материали, като например кодовете за контрол на грешки в компютърните и комуникационните системи. [8, 9, 10]

Литература

- [1] A. BURR. Teaching Channel Coding Principles Through Simulation. *IEEE Communications Magazine*, 39(8), 2001, 110-114.
- [2] D. GARG, S. GARG. Enhancing Learning in Error Correction Codes Using Problem-Based Learning. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 14(1), 2017.
- [3] K. HARIZANOV, N. PAVLOVA. WEB platforme kato instrument za razrabotvane na didakticheski material. *Godishnik na FMI, SHU „Episkop Konstantin Preslavski“*, Shumen, 2014 (in Bulgarian).
- [4] S. KUMAR, M. KUMAR. Integrating E-Learning in Teaching Error Control Codes. *Journal of Engineering Education Transformations*, 32(3), 2019, 12-20.
- [5] N. PAVLOVA, K. HARIZANOV, S. ALIEV, D. EMINOV. First steps in e-learning. Perspective on teaching practice, *International Scientific Refereed Online Journal SocioBrains*, Issue 17, January 2016, ISSN 2367-5721.
- [6] G. PETROV, A. KOSTOV. Kompyutarna simulatsiya na Heming kodove kato instrument za obuchenie. *Sbornik ot mezhdunarodnata konferentsiya po inzhenerno obrazovanie*, Sofiya, 2018 (in Bulgarian).
- [7] J. P. SMITH, T. R. BROWN. Teaching Error Correction Codes with Interactive Software Tools. *IEEE Transactions on Education*, 49(2), 2006, 273-278.
- [8] L. STANEVA, I. VARDEVA, TS. TSANKOV. Modelirane protsesa na poluchavane na kod na Heming s obobshtena mreza. *Godishnik na universitet „Prof. d-r Asen Zlatarov“*, t. XLIII, Burgas, 2014, ISSN 1312-1359 (in Bulgarian).
- [9] TS. TSANKOV, D. DIMANOVA. Kompyutarna didaktichna programa za kod na Heming. *Godishnik na FTN, SHU „Episkop Konstantin Preslavski“*, Shumen, 2016, ISSN 1311-834X (in Bulgarian).
- [10] TS. TSANKOV, H. HRISTOV. E-Learning Shell v Obuchenieto po inzhenernite distsiplini. *Godishnik na FTN, SHU „Episkop Konstantin Preslavski“*, Shumen, 2010, ISSN 1311-834X (in Bulgarian).
- [11] I. TSONEV, D. VASILEV. Postigane visoki pokazатели na predavane na danni v mobilnite komunikatsii. *Nauchna konferentsiya s mezhdunarodno uchastie MATTEH 2014*, Shumen, 2014 (in Bulgarian).
- [12] V. ALEKSIEVA, H. VALCHANOV. Osnovi na kompyutarnite komunikatsii. *Rakovodstvo za laboratorni uprazhneniya*, Universitetsko izdatelstvo pri TU-Varna, 2019 (in Bulgarian).