

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025*

**A METHOD FOR SOLVING EXTREMAL PROBLEMS IN
PLANE GEOMETRY**

Ivaylo Dimitrov¹, Mehmed Kodzha²

^{1,2} High School of Mathematics “Nancho Popovich”, Shumen, Bulgaria
e-mails: ¹pmg.iv.dimitrov@abv.bg, ²mkodzha@gmail.com

In the article, we propose a method for solving extreme problems in plane geometry. We apply the method to problems, that are solved using basic elementary inequalities and trigonometric inequalities in the triangle. We reduce the problem to finding the smallest or largest value of a function. The purpose of the method is to build an algorithm for solving extremal problems.

Keywords: extremal problems, smallest value of a function, largest value of a function

**МЕТОД ЗА РЕШАВАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ В
ПЛАНИМЕТРИЯТА**

Ивайло Димитров¹, Мехмед Коджа²

^{1,2} ППМГ „Нанчо Попович“, Шумен, България
e-mails: ¹pmg.iv.dimitrov@abv.bg, ²mkodzha@gmail.com

В статията предлагаме метод за решаване на екстремални задачи в планиметрията. Прилагаме метода за задачи, които се решават с помощта на основни елементарни неравенства и тригонометрични равенства в триъгълника. Ние свеждаме проблема до намиране на най-малка или най-голяма стойност на функция. Целта на метода е построяване на алгоритъм за решаване на екстремални задачи.

Ключови думи: екстремални задачи, най-малка стойност на функция, най-голяма стойност на функция

1 Въведение

Екстремалните задачи са свързани с намирането на максимални и минимални стойности на функции при определени условия. Те се срещат в различни области

на математиката: планиметрия, стереометрия, алгебра, анализ и други. Също така имат приложение и в редица области, като икономика, инженерство, физика и други, например за максимизиране на печалбата или минимизиране на разходите, оптимизиране на ресурси и т.н.

В училищния курс по математика, за решаване на екстремални задачи в планиметрията, се използват следните методи:

- изразяване на неизвестната величина чрез една променлива и намиране на най-малка или най-голяма стойност на получената функция;
- използване на неравенствата между средноквадратично, средноаритметично, средногеометрично и среднохармонично;
- използване на тригонометрични равенства в триъгълника, които не са включени в учебните планове по математика.

2 Задачи

В статията разглеждаме екстремални задачи в планиметрията, в които е невъзможно свеждането на проблема до изследване на функция на една променлива. В помагалата по математика за ученици, за решаването на такива задачи се използват основни елементарни неравенства и тригонометрични равенства в триъгълника. Това обаче представлява трудност не само поради липсващ алгоритъм за решаването им, но и поради необходимостта от прилагане на някои неизучавани специфични тригонометрични равенства за ъгли в триъгълник.

Трябва да отбележим и следното несъответствие в учебните планове по задължителната и профилираната подготовка по математика в 12. клас: екстремалните задачи по планиметрия в задължителната подготовка, които се решават с помощта на основните елементарни неравенства, се изучават във втори срок, а по профилираната подготовка – в първи срок. Това прави недопустимо използването на методите от задължителната подготовка при решаване на този тип задачи по профилираната подготовка.

Ще предложим метод, при който свеждаме проблема до изследване на условен екстремум на функция на две променливи. Нашата цел е да изследваме този проблем на ученическо ниво, без да се налага използването на неизучавани в училище методи по висша математика. В общообразователната, както и в профилираната подготовка по математика в училище, не се изучават функции на две променливи. Ние съставяме функция на две променливи, но я разглеждаме като функция на една променлива (първо на едната, а после на другата), приемайки другата за параметър. Това не представлява трудност за учениците, защото в голяма част от екстремалните задачи по профил математика изследват функции, при които се налага да работят с буквени константи. Изследваме така получените функции едновременно за най-малка или най-голяма стойност, първо по едната, а после по другата променлива. Важно е да отбележим, че по условие приемаме съществуването на единствена точка на екстремум.

При изследване на локални екстремуми на функция на две променливи $f(x, y)$

се пресмятат частните производни f'_x и f'_y , след което се решава системата

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

за намиране на критичните точки. За да избегнем това, ние намираме екстремум по едната променлива и заместваем стойността ѝ във функцията. Така получаваме нова функция на една променлива, за която намираме стойността на другата променлива в точката на екстремум. Целта тук е да модифицираме познатия алгоритъм за намиране на локални екстремуми на функция на две променливи в курса по „Диференциално смятане“ и да го направим приложим за решаване на екстремални задачи в училище.

Ще опишем по-подробно стъпките на метода в следващия пример:

Задача 1. [3, 4] От всички триъгълници с даден периметър P да се намери този, който има най-голямо лице.

В [4] се предлага следното решение на задачата, в което се използва неравенство между средноаритметично и средногеометрично:

Решение. [4] Лицето S на всеки триъгълник със страни a, b, c се изразява чрез полупериметъра му $p = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ по Хероновата формула:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Понеже p е фиксирано и променливите множители $p-a, p-b, p-c$ имат постоянна сума $(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - 2p = p$, от неравенството $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ между средноаритметично и средногеометрично за произволни неотрицателни числа a, b, c следва, че $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}$, а оттук и $S \leq \sqrt{\frac{p^4}{3^3}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$. Лицето

S достига най-голямата стойност $S_{max} = \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$ за триъгълник, за който $p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c = \frac{P}{3}$, т.е. за единствения равностранен триъгълник с даден периметър P .

Сега ще предложим решение на задачата по нашия метод.

Решение. Нека страните на триъгълника са a, b и c . По условие $P = const$. Имаме $c = P - (a+b)$. От хероновата формула, за лицето на триъгълника получаваме

$$S = \sqrt{\frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - a \right) \left(\frac{P}{2} - b \right) \left(\frac{P}{2} - (P - (a+b)) \right)},$$

което се свежда до

$$(2.1) \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{P(P-2a)(P-2b)(2a+2b-P)}.$$

Ще изследваме (2.1) веднъж като функция на страната a и втори път като функция на страната b (без значение първо на коя). Понеже търсим най-голямо лице, интересуваме се от най-голямата стойност. Нека например, първо да намерим най-голямата стойност на (2.1) като функция на a , т.е.

$$(2.2) \quad S(a) = \frac{1}{4} \sqrt{P(P-2a)(P-2b)(2a+2b-P)}; \quad 0 < a < \frac{P}{2},$$

приемайки $0 < b < \frac{P}{2}$ за параметър и изследваме тази функция за най-голяма стойност. Производната на функцията (2.2) е

$$S'(a) = \frac{P(P-2b)}{2} \cdot \frac{P-2a-b}{\sqrt{P(P-2a)(P-2b)(2a+2b-P)}}$$

и функцията има единствена точка на екстремум

$$(2.3) \quad a = \frac{P-b}{2},$$

в която има максимум. Така получаваме, че функцията (2.2) достига най-голямата си стойност в точката (2.3).

Следващата стъпка е да намерим най-голямата стойност по другата променлива b . Замествайки стойността на a от (2.3) в (2.1), изследваме нова функция на страната b

$$(2.4) \quad S(b) = \frac{1}{4} \sqrt{Pb^2(P-2b)}; \quad 0 < b < \frac{P}{2}.$$

Производната на (2.4) е

$$S'(b) = \frac{P}{4} \cdot \frac{Pb-3b^2}{\sqrt{Pb^2(P-2b)}}$$

и има единствена точка на екстремум

$$(2.5) \quad b = \frac{P}{3},$$

в която има максимум. Сега заместваем стойността на b от (2.5) в (2.3) и получаваме стойността на a в точката на максимум $a = \frac{P}{3}$.

Така намерихме най-голямата стойност на (2.1) и по двете променливи. По този начин можем да направим заключението, че максимално лице има триъгълникът със страни $a = b = \frac{P}{3}$, откъдето се получава $c = \frac{P}{3}$, т.е. $a = b = c = \frac{P}{3}$. Оттук правим извод, че от всички триъгълници с даден периметър P най-голямо лице има равностранный.

Забележка. Да отбележим, че (2.1) удовлетворява условието $S(a, b) = S(b, a)$. В този случай методът може да се опрости по следния начин: След като установим, че функцията (2.2) има екстремум в (2.3), за да намерим точката на екстремум на (2.4), е достатъчно да направим циклична смяна на променливите, т.е. $b = \frac{P-a}{2}$. Решавайки системата

$$\begin{cases} a = \frac{P-b}{2} \\ b = \frac{P-a}{2} \end{cases}$$

намираме $a = b = \frac{P}{3}$. Този вариант на метода е приложим и за останалите примери, които ще разгледаме, както и в други екстремални планиметрични задачи. Това обаче не е вярно в общия случай, особено в повечето екстремални задачи в алгебрата.

Ще приложим метода и в следващите примери.

Задача 2. [1] От всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r , намерете този, който има най-малко лице. Намерете това лице.

Първо ще покажем решение, което се предлага в [1], при което се използва тригонометрично равенство за ъгли в триъгълник и неравенство между средноаритметично и средногеометрично.

Решение. [1] Ако α , β и γ са ъгли в триъгълник е изпълнено равенството

$$\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} = \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2}.$$

В сила са равенствата $p - a = r \cotg \frac{\alpha}{2}$, $p - b = r \cotg \frac{\beta}{2}$, $p - c = r \cotg \frac{\gamma}{2}$. За полупериметъра на триъгълника получаваме

$$p = \frac{P}{2} = p - a + p - b + p - c = r \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \right) = r \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2}.$$

За да оценим получения израз, ще използваме неравенството между средноаритметично и средногеометрично.

Да означим $\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} = \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2} = m$, $m > 0$.

От неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме

$$\frac{\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{m}{3} \geq \sqrt[3]{m}.$$

Решението на последното неравенство е $m \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow m = \cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}$.

За лицето на триъгълника имаме

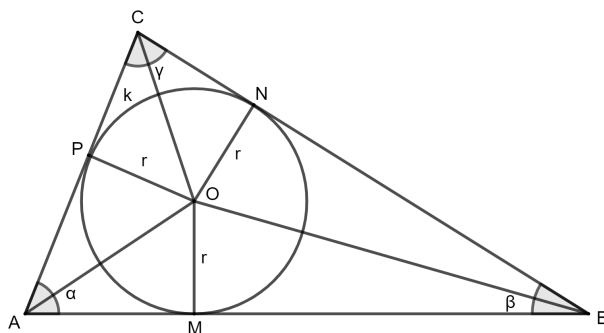
$$S = pr = r^2 \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \right) \Rightarrow S \geq 3\sqrt{3}r^2.$$

Равенство се достига при $\cotg \frac{\alpha}{2} = \cotg \frac{\beta}{2} = \cotg \frac{\gamma}{2}$.

Получихме, че от всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r , най-малко лице има равностранният триъгълник и лицето му е $S = 3\sqrt{3}r^2$.

Сега ще покажем решението на задачата с нашия метод:

Решение. Разглеждаме $\triangle ABC$ и вписана в него окръжност $k(O; r)$. Нека ъглите на $\triangle ABC$ са $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ и $\angle ACB = \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Построяваме радиуси OM , ON и OP съответно към страните AB , BC и AC на триъгълника.



Изразявайки отсечките AM , MB , BN , NC , CP и PA чрез r и тангенсите на ъглите $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$, и използвайки, че $AM + MB = AB$, $BN + NC = BC$ и $CP + PA =$

AC , получаваме

$$BC = r \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \right), \quad CA = r \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right),$$

$$AB = r \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \right).$$

Сега използвайки формулата $S = pr$ за лицето на триъгълника и след няколко елементарни тригонометрични преобразувания, получаваме

$$(2.6) \quad S = r^2 \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \right); \quad \alpha \in (0; \pi), \quad \beta \in (0; \pi).$$

Изследваме (2.6) първо като функция на α . Производната на (2.6) може да се запише във вида

$$S'(\alpha) = -\frac{r^2 \cos \frac{\beta}{2}}{2} \cdot \frac{\cos \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

и функцията има минимум за

$$(2.7) \quad \alpha = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

Заместяваме стойността на α от (2.7) в (2.6) и получаваме функция на β

$$(2.8) \quad S(\beta) = r^2 \left(\cotg \frac{\pi - \beta}{4} + \cotg \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi + \beta}{4} \right) = r^2 \left(2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \beta}{4} \right) + \cotg \frac{\beta}{2} \right).$$

Производната на (2.8) се свежда до вида

$$S'(\beta) = \frac{r^2}{4} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} - 1}{\sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi + \beta}{4}}$$

и функцията има минимум за

$$(2.9) \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Заместявайки (2.9) в (2.7) получаваме стойността на β в точката на минимум $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

По този начин установихме, че функцията има най-малка стойност при

$$(2.10) \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Следователно $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

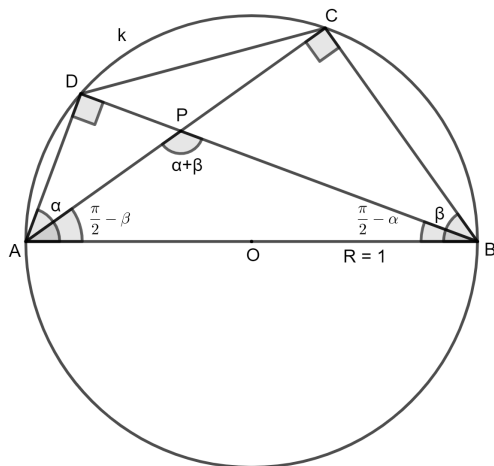
Така получаваме, че от всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r , най-малко лице има равностранният. Заместявайки (2.10) в (2.6), намираме най-малкото лице $S_{\min} = 3\sqrt{3}r^2$.

Ще приложим метода в още 2 задачи.

Задача 3. [3] От всички четириъгълници $ABCD$, вписани в окръжност с радиус 1 и такива, че $AB = 2$, да се намери онзи, който има най-голямо лице.

Решение. Нека $k(O; R = 1)$ е описаната окръжност около четириъгълника $ABCD$. Понеже $AB = 2 = 2R$ е диаметър на k , то $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \frac{\pi}{2}$. Нека $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ и $AC \cap BD = P$.

От това, че $\sphericalangle DBA$ и $\sphericalangle BAC$ са вписани ъгли в k , получаваме $\sphericalangle DBA = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2} - \beta$. Следователно $\sphericalangle APB = \alpha + \beta$.



От синусовата теорема имаме

$$2R = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow BD = 2 \sin \alpha,$$

$$2R = \frac{AC}{\sin \beta} \Rightarrow AC = 2 \sin \beta.$$

За лицето на четириъгълника получаваме

$$(2.11) \quad S = AC \cdot BD \cdot \sin \sphericalangle APB = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta); \quad \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}), \beta \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Нека първо да изследваме (2.11) като функция на α . Пресмятаме първата производна и получаваме

$$S'(\alpha) = 2 \sin \beta \cdot \sin(2\alpha + \beta).$$

Функцията има максимум в

$$(2.12) \quad \alpha = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

Заместваме (2.12) в (2.10) и изследваме новата функция

$$(2.13) \quad S(\beta) = 2 \sin \beta \cdot \sin \frac{\pi - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\pi + \beta}{2} = \sin \beta (\cos \beta + 1)$$

за максимум. Производната на (2.13) се записва във вида

$$S'(\beta) = 2 \cos^2 \beta + \cos \beta - 1$$

и има максимум в

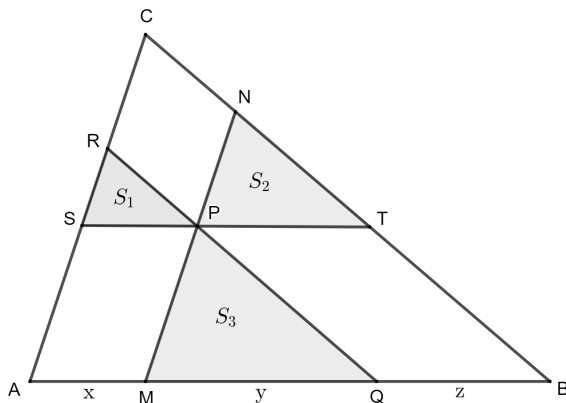
$$(2.14) \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Заместваме (2.14) в 2.12) и получаваме $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Най-голямата стойност на (2.11) се достига за $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и $\beta = \frac{\pi}{3}$. Лесно се проверява, че $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, т.е. $AB \parallel DC$ и $DC = 1$. Това означава, че най-голямо лице има равнобедреният трапец с малка основа $DC = 1$.

Задача 4. [2] Нека P е вътрешна точка за $\triangle ABC$. През P са построени прави, успоредни на страните на триъгълника, които отсичат три триъгълника с лица S_1 , S_2 и S_3 . Да се намери това положение на P , за което сборът $S_1 + S_2 + S_3$ е най-малък.

Решение. Нека $\triangle ABC$ има лице $S = \text{const}$ и страна $AB = a$. Нека $P = MN \cap QR \cap ST$, където $MN \parallel AC$ ($M \in AB$; $N \in BC$), $QR \parallel BC$ ($Q \in AB$; $R \in AC$) и $ST \parallel AB$ ($S \in AC$; $T \in BC$). Да означим $S_{\triangle SPR} = S_1$, $S_{\triangle PTN} = S_2$ и $S_{\triangle MQP} = S_3$. Нека $AM = x$, $MQ = y$ и $QB = z$.



Лесно се доказва, че $\triangle ABC \sim \triangle SPR \sim \triangle PTN \sim \triangle MQP$. От подобие на триъгълниците имаме

$$(2.15) \quad \frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{a^2},$$

$$(2.16) \quad \frac{S_2}{S} = \frac{z^2}{a^2},$$

$$(2.17) \quad \frac{S_3}{S} = \frac{y^2}{a^2}.$$

От (2.15), (2.16) и (2.17) следва, че

$$(2.18) \quad \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}.$$

Но $z = a - (x + y)$, откъдето $z^2 = a^2 - 2a(x + y) + (x + y)^2$. Сега (2.18) може да се запише във вида

$$(2.19) \quad S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S}{a^2}(2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2a(x + y) + a^2).$$

Означавайки $S_1 + S_2 + S_3 = f$, записваме (2.19) като

$$(2.20) \quad f = \frac{S}{a^2}(2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2a(x + y) + a^2); \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < a.$$

Разглеждаме (2.20) първо като функция на x . Производната ѝ е равна на

$$f'(x) = \frac{S}{a^2}(4x + 2y - 2a)$$

и достига минимум за

$$(2.21) \quad x = \frac{a - y}{2}.$$

Заместваме (2.21) в (2.20) и изследваме новата функция, която се записва във вида

$$(2.22) \quad f(y) = \frac{S}{2a^2}(3y^2 - 2ay + a^2).$$

Производната на (2.22) е

$$(2.23) \quad f'(y) = \frac{S}{a^2}(3y - a)$$

и достига минимум за

$$(2.24) \quad y = \frac{a}{3}.$$

Накрая заместваме (2.24) в (2.21) и получаваме $x = \frac{a}{3}$.

Така констатирахме, че (2.20) има най-малка стойност за $x = y = \frac{1}{3}a$. Получаваме, че $x = y = z = \frac{1}{3}a$ и $S_1 = S_2 = S_3$. Лесно се проверява, че точка P е медицентър. Окончателно, $S_1 + S_2 + S_3$ е най-малък, когато точка P е медицентър.

3 Заключение

Предлаганият от нас метод има за цел да създаде алгоритъм за решаване на екстремални задачи в училище. Той е особено подходящ за екстремални задачи по профилираната подготовка по математика в 12. клас, при които е невъзможно съставянето и изследването на функция на една променлива и за решаването на които се използват другите споменати методи. Считаме, че методът е полезен и улеснява значително работата на учениците. Удобен е за използване в часовете по профил математика в 12. клас.

Литература

- [1] Д. ГЪЛЪБОВА, М. СИДЕРОВА. Математика 12. клас профилирана подготовка. София, Веди, 2021. [D. GALABOVA, M. SIDEROVA. Matematika 12. klas profilirana podgotovka. Sofia, VEDI, 2021.] (in Bulgarian)
- [2] К. КОЛАРОВ, ХР. ЛЕСОВ. Сборник задачи по стереометрия. Добрич, Интеграл Добрич, 2017. [K. KOLAROV, HR. LESOV. Sbornik zadachi po stereometriya. Dobrich, Integral Dobrich, 2017.] (in Bulgarian)
- [3] К. КОЛАРОВ, ХР. ЛЕСОВ. Сборник от задачи по геометрия VII - XII клас. Добрич, Интеграл Добрич, 2013. [K. KOLAROV, HR. LESOV. Sbornik ot zadachi po geometriya VII - XII klas. Dobrich, Integral Dobrich, 2013.] (in Bulgarian)
- [4] М. ХРИСТОВ, Е. СТОИМЕНОВА, Ю. ЦВЕТКОВ, Ц. БАЙЧЕВА. Математика 12. клас. София, Klett Bulgaria, 2020. [M. HRISTOV, E. STOIMENOVA, Y. CVETKOV, C. BAYCHEVA. Matematika 12. klas. Sofia, Klett Bulgaria, 2020.] (in Bulgarian)