

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

APPLICATION OF COMPOSITION OF DILATIONS AND
DILATION FROM POINT (BOUTIN'S THEOREMS)

Julia Ninova

Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University "St. Kliment Ohridski",
Sofia, Bulgaria

e-mail: ninova@fmi.uni-sofia.bg

The article examines the application of composition of dilations from point and dilation from point in proving some statements.

Keywords: dilation from point, composition of dilations from point, Boutin's theorems

ПРИЛОЖЕНИЕ НА КОМПОЗИЦИЯ НА ХОМОТЕТИИ И
НА ХОМОТЕТИЯ (ТЕОРЕМИ НА БУТЕН)

Юлия Нинова

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски“, София, България

e-mail: ninova@fmi.uni-sofia.bg

В статията се разглежда приложение на композиция на хомотетии и на хомотетия за доказване на някои твърдения.

Ключови думи: хомотетия, композиция на хомотетии, теореми на Бутен

Кратки сведения за Boutin

М. А. Бутен, професор по математика, е роден в Париж през 1858 г. Той се присъединява към Математическото общество на Франция през 1885 г. и публикува в списание за елементарна математика от 1890 г.

История – начало

В сп. *Математика и информатика*, бр. 3, 1996, IV корица, като задача на броя е публикувано следното твърдение, свързано с името на Бутен.

Теорема на Бутен 1. Нека A_0 , B_0 и C_0 са хомотетичните образи на средите съответно на страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ при хомотетия с център центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Да се докаже, че правите AA_0 , BB_0 и CC_0 се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

<https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.158-166>

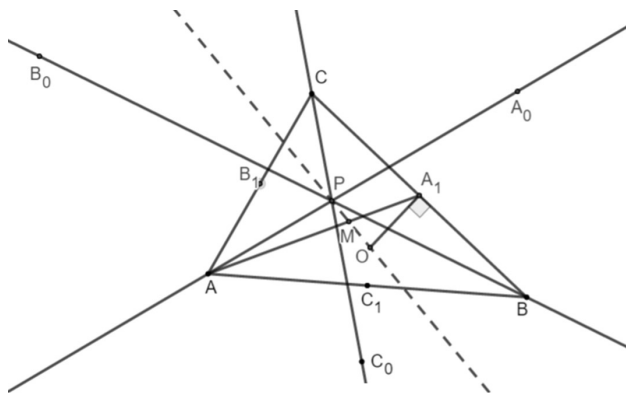
2020 Mathematics Subject Classification: 97C99.

Решения и обобщение на разглежданата теорема са публикувани в [6] и [7]. Даденото по-долу доказателство на твърдението и в изложението, свързано с тази теорема, се използват следните две твърдения.

Твърждение 1. *Композицията на две хомотетии е хомотетия или транслагция. Композицията е транслагция (или идентитет), когато коефициентите на двете хомотетии са реципрочни числа. Ако композицията е хомотетия, то коефициентът ѝ е равен на произведението на коефициентите на дадените хомотетии, а трите центъра лежат на една права.* [5]

Твърждение 2. *Хомотетиите с общ център образуват група.* [4]

Доказателство на теорема на Бутен 1 Нека A_1 , B_1 и C_1 са средите съответно на страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$, точката O е центърът на описаната около триъгълника окръжност, а точката M е медицентърът на триъгълника и $M \neq O$.



Черт. 1.

Според означенията на черт. 1, твърдението се доказва с използване на следната композиция от хомотетии:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & A \xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} A_1 \xrightarrow{\chi_O^k} A_0 \\
 & B \xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} B_1 \xrightarrow{\chi_O^k} B_0, \\
 & C \xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} C_1 \xrightarrow{\chi_O^k} C_0
 \end{aligned}$$

където $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ е хомотетия с център точката M и коефициент $-\frac{1}{2}$, а χ_O^k е хомотетия с център точката O и коефициент реално число $k \neq 0$. Според цитираното Твърждение 1, композицията на двете хомотетии е хомотетия, ако $k \neq -2$. Ако $k \neq -2$, то композицията на двете хомотетии е хомотетия с център точката $P = AA_0 \cap BB_0$ (черт. 1.) и тази точка според същото Твърждение 1 лежи на правата OM , т.е. на правата на Ойлер за $\triangle ABC$ (начертана на чертежа с пунктир). Правите AA_0 , BB_0 и CC_0 се пресичат в точката P .

Ако $M \neq O$ и $k = -2$, то композицията на двете хомотетии е транслагция. Според означенията на черт. 2, твърдението се доказва с използване на следната композиция от хомотетии:

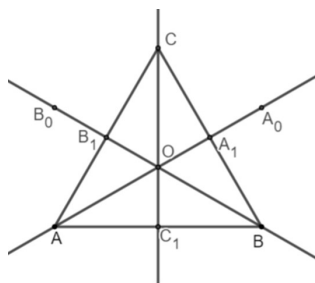
$$\begin{aligned}
A &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} A_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} A_0 \\
B &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} B_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} B_0 \\
C &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} C_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} C_0 \\
O &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} O_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} O_0.
\end{aligned}$$

Тогава правите AA_0 , BB_0 и CC_0 са успоредни помежду си и са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$, защото тя съвпада с правата OO_0 (черт. 2.).

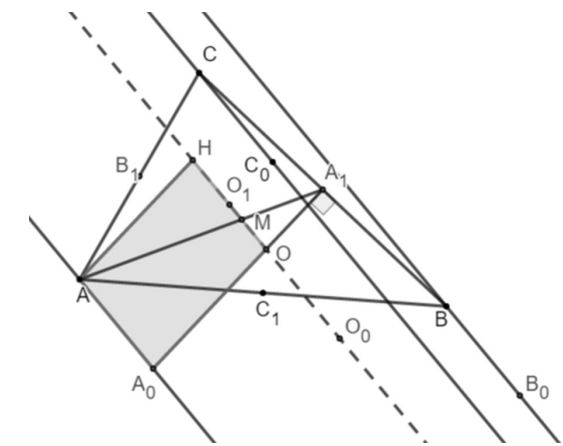
Успоредността на тези прави може да се докаже и по друг начин. Тъй като $OA_0 \perp BC$ и $AH \perp BC$ (точката H е ортоцентърът на $\triangle ABC$), то (1) $OA_0 \parallel AH$. Освен това (2) $OA_0 = 2OA_1 = AH$.

От (1) и (2) следва, че четириъгълникът AA_0OH (черт. 2.) е успоредник и тогава $AA_0 \parallel OH$. По аналогичен начин се доказва, че и правите BB_0 и CC_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

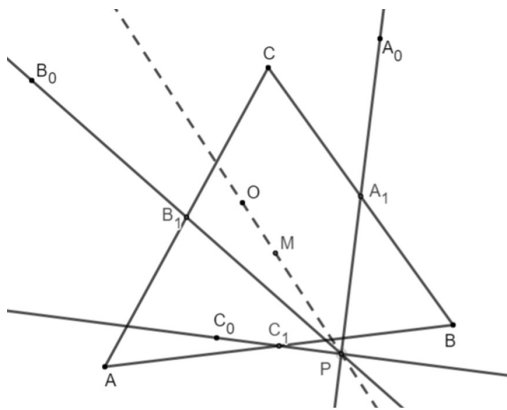
Ако $M \equiv O$ и $k \neq -2$, то композицията $\chi_O^k \circ \chi_M^{-\frac{1}{2}}$ е хомотетия с център точката M съгласно Твърдение 2. Правите, разглеждани в теоремата, минават през медицентъра на триъгълника (черт. 3.).



Черт. 3.



Черт. 2.



Черт. 4.

Ако $M \equiv O$ и $k = -2$, композицията е идентитетът.

В следващите разсъждения ще разгледаме следната задача.

Задача 1 Точките A_0 , B_0 и C_0 са образите на върховете на $\triangle ABC$ при симетрията относно произволна точка. Да се докаже, че правите A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 се пресичат в една точка, където точките A_1 , B_1 и C_1 са средите съответно на

страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$. (неизвестен източник)

Доказателство Според означенията на черт. 4. задача 1 се решава с използване на следната композиция от хомотетии:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} A \xrightarrow{\chi_O^{-1}} A_0 \\
 B_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} B \xrightarrow{\chi_O^{-1}} B_0 \\
 C_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} C \xrightarrow{\chi_O^{-1}} C_0,
 \end{aligned}
 \tag{**}$$

където точката M е медицентърът на $\triangle ABC$, а O е произволна точка от равнината на триъгълника. Централната симетрия с център точката O е записана като хомотетия с център точката O и коефициент -1 . Ако точката O не съвпада с медицентъра M на $\triangle ABC$ (черт. 4.), то композицията на посочените две хомотетии е хомотетия с коефициент 2 и център точката P от правата OM . Следователно правите A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 минават през точката P . Този извод може да се получи и от композицията на хомотетиите в (*), като се замени $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ с χ_M^{-2} и се разменят местата на върховете на триъгълника и съответните им среди на страните на триъгълника, а χ_O^k е заменена с χ_O^{-1} , само че в този случай точката O е центърът на описаната около триъгълника окръжност. По този начин, обаче, се ограничава общността на твърдението от задача 1. Ако точките O и M съвпадат, то тогава разглежданите в задачата прави минават през медицентъра на триъгълника (черт. 3.).

Теорема на Бутен 1 и Задача 1 дават идея за формулиране на две нови твърдения, във формулировката на които точката O е произволна точка от правата на Ойлер за съответния триъгълник, а централната симетрия от Задача 1 е заменена с хомотетия с коефициент произволно реално число $k \neq 0$.

Твърждение 3. Нека A_0 , B_0 и C_0 са хомотетичните образи на средите съответно на страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ при хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ и коефициент реалното число $k \neq 0$. (p) Да се докаже, че правите AA_0 , BB_0 и CC_0 или се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$, или са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$. (r)

Коментар. При тази формулировка на Твърждение 3, в сравнение с даденото в теорема на Бутен 1, точката O принадлежи на безкрайно множество от точки – правата на Ойлер за $\triangle ABC$. В този смисъл Твърждение 3 се явява обобщение на Теорема на Бутен 1.

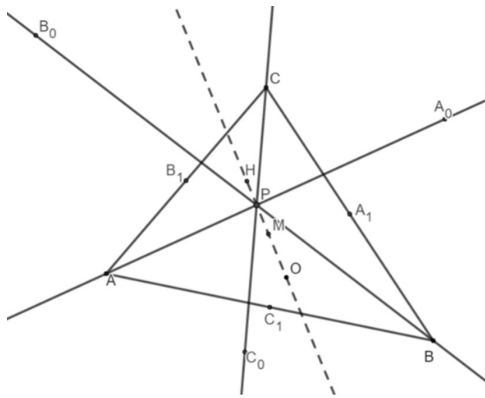
Доказателство. При направените означения логическата структура на Твърждение 3 е (i) $p \rightarrow r$.

Верността на твърдението следва от композицията на хомотетиите

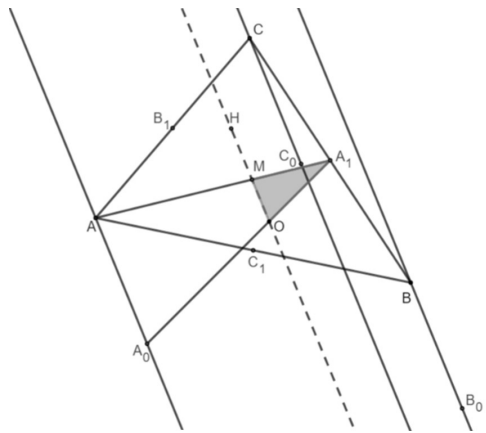
$$\begin{aligned}
 A &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} A_1 \xrightarrow{\chi_O^k} A_0 \\
 B &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} B_1 \xrightarrow{\chi_O^k} B_0 \\
 C &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} C_1 \xrightarrow{\chi_O^k} C_0,
 \end{aligned}
 \tag{***}$$

като χ_O^k е хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$. Ако $O \neq M$ и $k \neq -2$, то композицията на двете хомотетии е хомотетия с център точката $P = AA_0 \cap BB_0$ (черт. 5.) и тази точка според цитираното Твърждение 1 лежи на правата OM , т.е. на правата на Ойлер за $\triangle ABC$. Ако $k = -2$ и $O \neq M$,

то композицията на двете хомотетии е транслация. Правите AA_0 , BB_0 и CC_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.



Черт. 5.



Черт. 6.

Това твърдение се доказва и по следния начин. Вярно е, че $\triangle A_1MO \sim \triangle A_1AA_0$ (черт. 6.), защото $\frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3} = \frac{A_1O}{A_1A_0}$. Следователно $MO \parallel AA_0$. По аналогичен начин се доказва, че и правите BB_0 и CC_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$. Ако $O \equiv M$ и $k = -2$, композицията е идентитетът.

Верността на твърдението следва и от композицията на хомотетиите в (**), като се замени χ_M^{-2} с $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ и се разменят местата на средите на страните на триъгълника и на върховете му, а централната симетрия χ_O^{-1} се замени с хомотетия χ_O^k ($k \neq 0$) с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

Твърдение 4. Нека A_0 , B_0 и C_0 са хомотетичните образи на върховете на $\triangle ABC$ при хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ и коефициент реалното число $k \neq 0$. (q) Да се докаже, че правите, минаващи през точките A_0 , B_0 и C_0 и средите A_1 , B_1 и C_1 съответно на страните BC , CA и AB или се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$ или са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$. (r)

Коментар. При тази формулировка на Твърдение 4, в сравнение с даденото в задача 1, позицията на точката O е ограничена до точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$. В този смисъл Твърдение 3 се явява следствие от задача 1.

Доказателство. При направените означения логическата структура на Твърдение 4 е (ii) $q \rightarrow r$. Според означенията на черт. 7, твърдението се доказва с използване на следната композиция от хомотетии:

$$\begin{aligned}
 & A_1 \xrightarrow{\chi_M^{-2}} A \xrightarrow{\chi_O^k} A_0 \\
 & B_1 \xrightarrow{\chi_M^{-2}} B \xrightarrow{\chi_O^k} B_0 \\
 & C_1 \xrightarrow{\chi_M^{-2}} C \xrightarrow{\chi_O^k} C_0.
 \end{aligned}$$

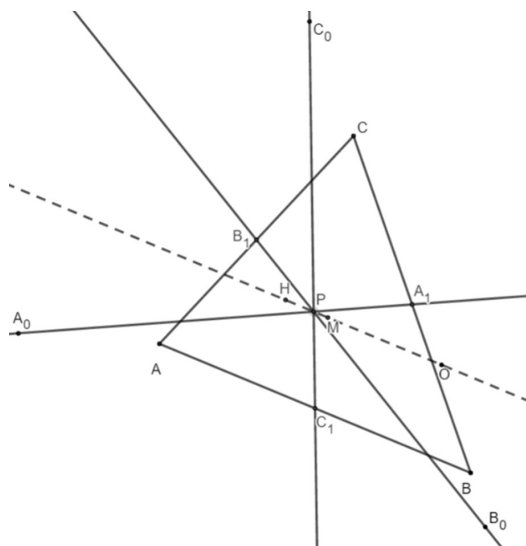
(****)

Ако $O \neq M$, композицията на двете хомотетии е хомотетия с коефициент $-2k$ при $k \neq -\frac{1}{2}$ и център точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$. В този случай правите A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 се пресичат в една точка (точката P) от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ (черт. 7.). Този извод може да се получи и от композицията на хомотетиите в (*), като се замени $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ с χ_M^{-2} и се разменят местата на средите на страните на триъгълника и на върховете му, а χ_O^k ($k \neq 0$) е хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

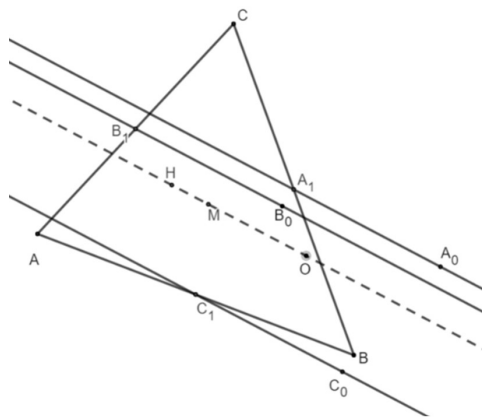
Композицията на двете хомотетии е транслация, ако $O \neq M$ и $k = -\frac{1}{2}$ (черт. 8.).

Тогава правите A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

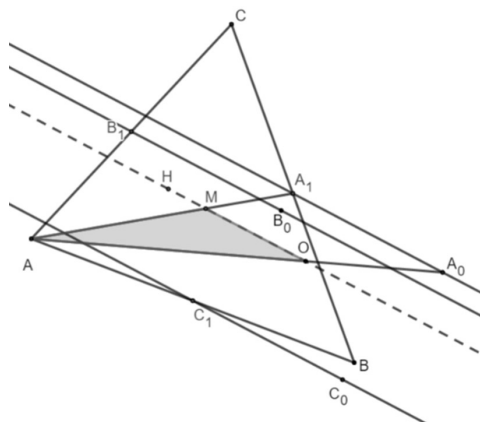
Това се доказва и по следния начин. Вярно е, че $\triangle AMO \sim \triangle AA_1A_0$ (черт. 9.), защото $\frac{AA_1}{AM} = \frac{3}{2} = \frac{AA_0}{AO}$. Следователно $MO \parallel A_1A_0$. По аналогичен начин се доказва, че и правите B_1B_0 и C_1C_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.



Черт. 7.



Черт. 8.



Черт. 9.

Ако $O \equiv M$ и $k \neq -\frac{1}{2}$ правите A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 минават през точка M . Ако $O \equiv M$ и $k = -\frac{1}{2}$ композицията е идентитетът.

Извод. Замяната на хомотетията $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ (точката M е медицентърът на $\triangle ABC$)

с обратната ѝ хомотетия χ_M^{-2} и смяната на образа и на първообраза дава възможност да се получат от сноповете прави, които се разглеждат в теорема на Бутен 1 и Твърдение 3, сноповете прави, които се разглеждат в задача 1 и Твърдение 4. Твърденията 3 и 4 са получени съответно от теорема на Бутен 1 и от задача 1, като точката O и в двата случая е заменена с произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

В логическите структури (i) и (ii) на двете твърдения заключението е означено с една и съща буква (r), защото се има предвид видът на сноповете прави. Еквивалентността (iii) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r$ следва от твърденията (i) и (ii). Логическата структура на заключенията на тези твърдения е изключваща дизюнкция, защото правите от снопа или минават през една точка, или са успоредни помежду си. Еквивалентност (iii) дава възможност да се формулира следното твърдение.

Нека A_0, B_0 и C_0 са хомотетичните образи на върховете или на средите A_1, B_1 и C_1 съответно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ при хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ и коефициент реалното число $k \neq 0$. Да се докаже, че трите прави, определени от образа и първообраза на посочените точки съответно при композициите от хомотетии (***) или (****), или се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$ или са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

История – продължение

В [2], отпечатано в [1], се среща друго твърдение, свързано с името на М. Бутен.

Теорема на Бутен 2. Три окръжности с центрове точките O_1, O_2 и O_3 се допират в точките A, B и C . Правите AC и BC пресичат окръжността с център O_1 съответно в точките E и F . Да се докаже, че правата EF минава през точката O_1 и $EF \parallel O_2O_3$.

В [1] може да се намери доказателство на това твърдение. Тук ще предложим доказателство на твърдението с използване на хомотетия и базиращо се на следното твърдение.

Твърдение 6. За всеки две неконцентрични нееднакви окръжности съществуват точно две хомотетии, които изобразяват едната окръжност в другата. [3]

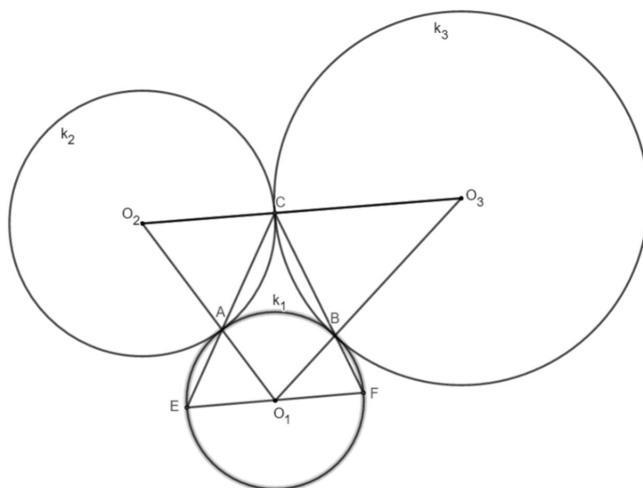
Ако двете окръжности са допирателни, то допирната им точка е центърът на едната от двете хомотетии.

Доказателство на теорема на Бутен 2. Според Твърдение 6 съществува хомотетия с център точката A , при която окръжностите $k_2(O_2; r_2)$ и $k_1(O_1; r_1)$ се изобразяват една в друга. Нека $\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}$ е хомотетия с център точката A и коефициент $k_A = -\frac{r_1}{r_2}$ и $\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}(k_2) = k_1$ (черт. 10.).

$$\text{Оттук следва, че } O_2 \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} O_1, (CE) \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} (CE),$$

$$\left(\{C\} = k_2 \cap (CE) \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} k_1 \cap (CE) = \{E\} \right) \text{ и } (3) \quad (O_2C) \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} (O_1E).$$

От извод (3) следва, че (4) $(O_2C) \parallel (O_1E)$, защото правата (O_2C) не минава през центъра A на хомотетията. Аналогично, нека $\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}$ е хомотетия с център точката B



Черт. 10.

и коефициент $k_B = -\frac{r_1}{r_3}$, при която окръжностите $k_3(O_3; r_3)$ и $k_1(O_1; r_1)$ с изобразяват една в друга, т.е. $\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}(k_3) = k_1$ (черт. 10.). Оттук следва, че $O_3 \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} O_1$, $(CF) \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} (CF)$, $C \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} F \left(\{C\} = k_3 \cap (CF) \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} k_1 \cap (CF) = \{F\} \right)$ и (5) $(O_3C) \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} (O_1F)$.

От извод (5) следва, че (6) $(O_3C) \parallel (O_1F)$, защото правата (O_3C) не минава през центъра B на хомотетията. От изводи (4) и (6) и транзитивността на релацията успоредност следва, че $(O_1E) \parallel (O_1F)$, т.е. трите точки E , F и O_1 лежат на една права, защото през точка O_1 минава единствена права, успоредна на правата (O_2O_3) . Следователно $(EF) \parallel (O_2O_3)$.

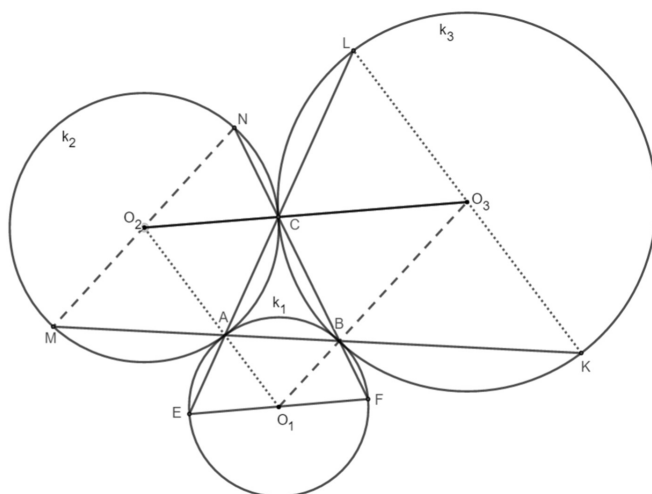
Забележка. В доказателството на последното твърдение с кръглите скоби се означава права, определена от посочените в скобите две точки.

Допълнителни изводи. На базата на доказаното твърдение следва, че $O_2O_3 = r_2 + r_3$, $EF = 2r_1$ и $O_2O_3 \parallel EF$. Ако по аналогичен начин се построят и отсечките MN и KL (черт. 11.), то $MN = 2r_2$ и $O_1O_3 \parallel MN$, и $KL = 2r_3$, и $O_1O_2 \parallel KL$. От тези изводи следва, че страните на $\triangle O_1O_2O_3$ са съответно успоредни на отсечките EF , KL и MN и верността на твърдението в заключението на следната задача.

Задача 2. Три окръжности с центрове точките O_1 , O_2 и O_3 се допират в точките A , B и C . Правите AC и BC пресичат окръжността с център O_1 съответно в точките E и F . Правите AB и BC пресичат окръжността с център O_2 съответно в точките M и N . Правите AB и AC пресичат окръжността с център O_3 съответно в точките K и L . Да се докаже, че $P_{\triangle O_1O_2O_3} = EF + KL + MN$.

Заключение

Целта на изложението е да се покаже възможността чрез използване на позна-



Черт. 11.

вателните методи обобщение и специализация или чрез използване на логически еквивалентности да се формулират нови твърдения или задачи, решими с посоченото теоретично средство. Дейностите, свързани с генериране на нови твърдения или задачи на такова ниво, са посилни само за някои ученици, но основно са ориентирани към учителите по математика.

Литература

- [1] SBMef, <https://www.sbpn.be/2003/11/mathematique-et-pedagogie-144/>
- [2] Scribd, <https://www.scribd.com/document/454929774/A-propos-du-theoreme-de-Boutin>
- [3] К. БАНКОВ, Т. ВИТАНОВ. Геометрия. София, Анубис, 2003. [K. BANKOV, T. VITANOV. Geometriya. Sofiya, Anubis, 2003] (in Bulgarian).
- [4] Н. МАТИНОВ. Геометрични преобразования и някои техни приложения. София, Народна просвета, 1974. [N. MARTINOV. Geometrichni preobrazovaniya i nyakoi tehni prilozheniya. Sofiya, Narodna prosveta, 1974] (in Bulgarian).
- [5] Н. МАТИНОВ. Трансформации в геометрията. София, Народна просвета, 1968. [N. MARTINOV. Transformatsii v geometriyata. Sofiya, Narodna prosveta, 1968] (in Bulgarian).
- [6] В. НЕНКОВ. Обобщение на теоремата на Бутен. *Математика и информатика*, **40**, № 3-4 (1997), 124 – 126. [V. NENKOV. Obobshtenie na teoremata na Buten. *Matematika i informatika*, **40**, № 3-4 (1997), 124 – 126] (in Bulgarian).
- [7] А. СИМЕОНОВ. Триъгълници със съвпадащи Ойлерови прави. *Математика и информатика*, **40**, №3-4 (1997), 123-124. [A. SIMEONOV. Triagalnitsi sas saypadashti Oylerovi pravi. *Matematika i informatika*, **40**, № 3-4 (1997), 123-124] (in Bulgarian).