

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

CIRCUMSPHERE AND INSPHERE OF A POLYHEDRON

Irena A. Parvanova¹, Vencislav D. Radulov²

¹Department of Applied Mathematics and Informatics, Technical University of Sofia,

²Faculty of mining electromechanics, University of Mining and Geology

e-mails: ¹irena.parvanova@tu-sofia.bg, ²v.radulov@mgu.bg

The article considers several tasks for circumsphere and insphere of a prism and a pyramid using the methods and tools used in descriptive geometry. The examples shown are executed in orthogonal axonometry and can be used to construct drawings illustrating the solution of a number of problems in stereometry.

Keywords: descriptive geometry; orthogonal projection; plane section of a sphere

СФЕРА, ОПИСАНА ОКОЛО И ВПИСАНА В МНОГОСТЕН

Ирена Първанова¹, Венцислав Радулов²

¹ Факултет Приложна математика и информатика, Технически университет, София

² Минно-електромеханичен факултет, Минно-геоложки университет, София

e-mails: ¹irena.parvanova@tu-sofia.bg, ²v.radulov@mgu.bg

Докладът разглежда няколко задачи за построяване на вписана и описана сфера около пирамида и призма, решени с методите на дескриптивната геометрия. Показаните примери са изпълнени в ортогонална аксонометрия и могат да бъдат от полза при построяването на чертежи, онагледяващи решаването на редица задачи от стереометрията.

Ключови думи: дескриптивна геометрия, ортогонално проектиране, равнинни сечения на сфера

Въведение: Задачи за намиране на елементи от вписана и описана около тяло сфера са част от учебния материал в курса по стереометрия за 11 клас - профил „Математика“. В тази доклад авторите показват няколко примера, решени в ортогонална аксонометрия, като се надяват направените чертежи да бъдат от полза при правилното и точно представяне на вписана и описана около пирамида и призма сфери.

Изложение: Всички показани примери са решени в ортогонална аксонометрия, тъй като само при ортогонално проектиране и в някои частни случаи на централно проектиране сфера се изобразява в кръг. Решенията на същите задачи в наклонена аксонометрия се усложняват значително. Изработването на чертежите изисква познаване на свойствата на успоредното проектиране и основни конструкции, използвани в дескриптивната геометрия, които могат да бъдат намерени в [3]. Решенията на първия и последния от показаните примери са описани подробно, а за останалите са отбелязани най-важните особености.

Пример 1. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 4)$ и вписана в нея правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 6$, лежаща върху оста z на координатната система.

Построенията са извършени в следната последователност:

1. Изобразен е аксонометричният кръст на ортогонална диметрия.
2. Построена е контурната окръжност на проекцията на сферата - окръжност σ' с център O' и радиус $R' = \frac{3\sqrt{2}}{4}R \approx 1.06R$.
3. Върху z' е нанесена точка V' , като $|O'V'| = R = 4$. Точката V е прободът на оста z на координатната система със сферата и е връх на пирамидата.
4. Върху z' е нанесена и точка S' , като $|V'S'| = h = 6$. Тъй като височината на призмата е 6, а радиусът на сферата е 4, то разстоянието от центъра на сферата до равнината на основата е $d = 2$.
5. Изобразено е сечението на сферата с равнината на основата - окръжност $k(S, r = \sqrt{R^2 - d^2})$. $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Това е описаната около основата окръжност. Проекцията на окръжността е елипсата k' с център S' , голяма полуос $a = \frac{3\sqrt{2}}{4}r = \frac{3\sqrt{6}}{2} \approx 1.06r$. и малка полуос $b = \frac{1}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 0.35r$. Тъй като окръжността лежи в равнина, успоредна на първа координатна равнина μ , то голямата ос на проекцията $1'2'$ е перпендикулярна на оста z' на координатната система. Подробно описани и решени задачи за построяване на сферични сечения са показани в [2] и в [1].
6. Основата на пирамидата е вписан квадрат $ABCD$ в окръжността k . Тогава проекциите на диагоналите на основата са двойка спрегнати диаметри на елипсата k' . За намирането им са направени следните построения:

- Точката A' – проекция на един от върховете на квадрата е избрана допирна точка на елипсата k' с контурната окръжност на сферата σ' .
- Построен е диаметърът на елипсата $A'C'$.
- Построена е произволна хорда на елипсата $M'N'$, успоредна на диаметъра $A'C'$.

– Намерена е средата на хордата - точката L' .

– Построен е диаметърът $B'D'$, който минава през точката L' .

7. Построени са околните ръбове на пирамидата, като при определяне на видимостта им сферата е приета за прозрачна.

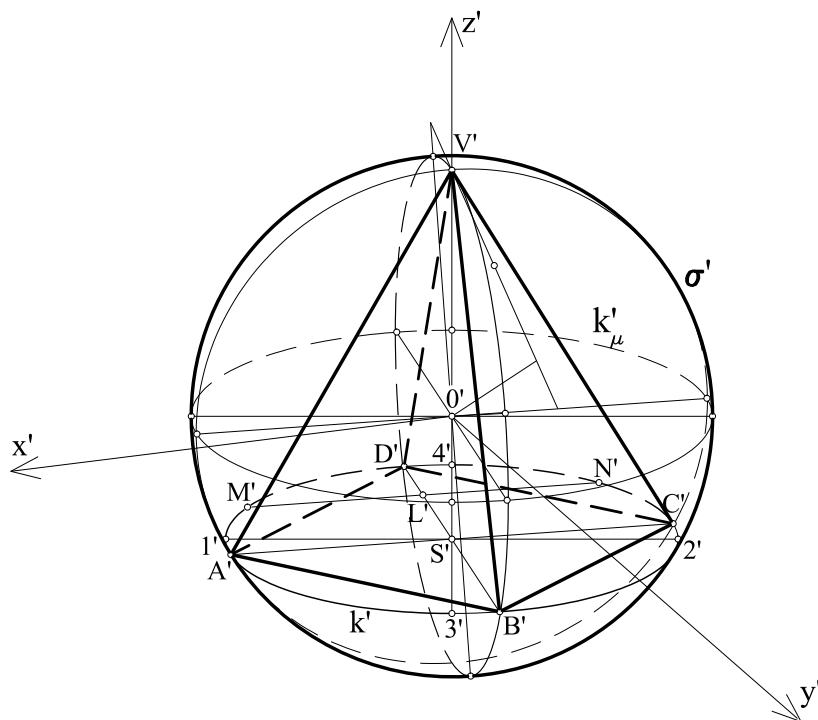
8. За по-добра нагледност на показания чертеж са изобразени сеченията на сферата с първа координатна равнина и тези, съдържащи диагоналните сечения на пирамидата.

– Образът на сечението на сферата с първа координатна равнина е елипсата k'_μ с голяма ос, перпендикулярна на z' и полуоси $a = R'$, $b = \frac{1}{3}R'$.

– За намирането на двойка спрегнати диаметри на другите две елипси са построени диаметрите на k'_μ , успоредни на диагоналите на основата на пирамидата.

– При изобразяването на елипсата - образ на описана около триъгълника VBD окръжност, е използвана конструкцията на Риц за намиране на осите на елипсата.

Построенията са показани на чертеж 1.

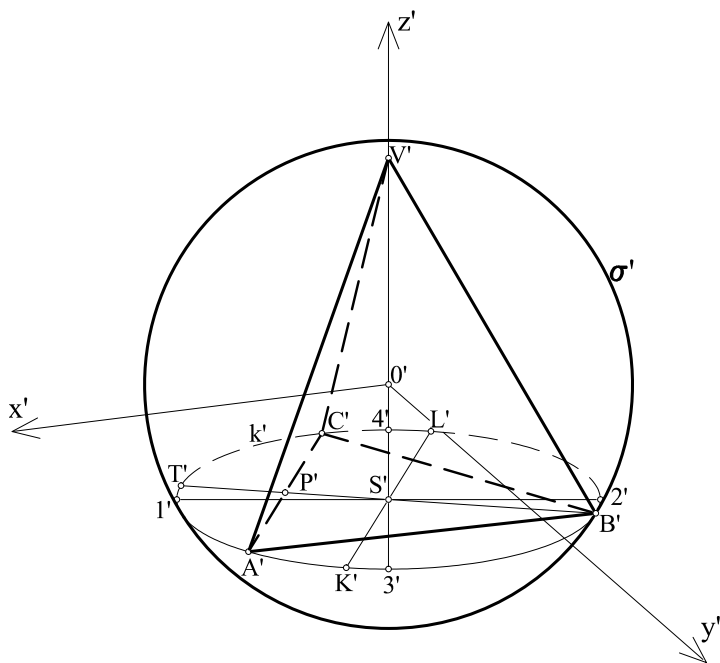


Чертеж 1

Пример 2. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 4)$ и вписана в нея правилна триъгълна пирамида с височина $h = 6$, лежаща върху оста z на координатната система.

Построенията при изработването на чертежа към този пример са направени в същата последователност, както в първия пример. За построяването на проекцията на основата на пирамидата е избрана точка B' - допирна точка на елипсата k' с контурната окръжност на проекцията на сферата. Намерени са двойката спрегнати диаметри на елипсата - $B'T'$ и $K'L'$ и е използвано свойството на медицентъра на триъгълника. Точката P' е среда на отсечка $T'S'$, а отсечката $A'C'$ е успоредна на $K'L'$.

Построенията са показани на чертеж 2.



Чертеж 2

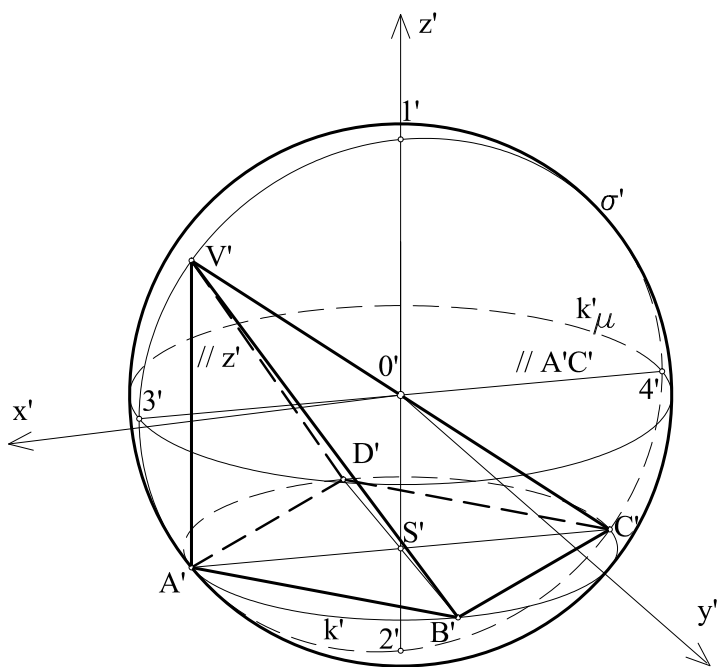
Пример 3. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 5)$ и вписана в нея пирамида с основа квадрат $ABCD$ с център точка $S(0; 0; -3)$, лежаща в равнина, успоредна на първа координатна равнина μ и околнен ръб VA - перпендикулярен на равнината на основата.

Пирамидата и сферата са подбрани, така че да илюстрират приблизително точно решението на задача 16 от КСИ на ФМИ към СУ „Св. Климент Охридски“, проведен на 2.04.2023 г.

Построени са контурната окръжност на проекцията на сферата σ' ($O', R' = \frac{3\sqrt{2}}{4}R \approx 1.06R$), сечението на сферата с равнина, минаваща през точка S и успоредна на първа координатна равнина μ , и успоредникът $A'B'C'D'$ - образ на основата на пирамидата. Тъй като околният ръб VA е перпендикулярен на равнината на основата, то центърът на сферата е среда на околния ръб VC . Тогава отсечка $V'A'$ е успоредна на оста z' , а точка O' е среда на $V'C'$.

За добра нагледност на чертежа са изобразени сечението на сферата с първа координатна равнина и сечението, в което е вписан триъгълник ACV . За второ-

то отсечките $1'2'$ и $3'4'$ са двойка спрегнати диаметри, отсечката $O'A'$ е голямата полуос, а точка V' е точка от елипсата.

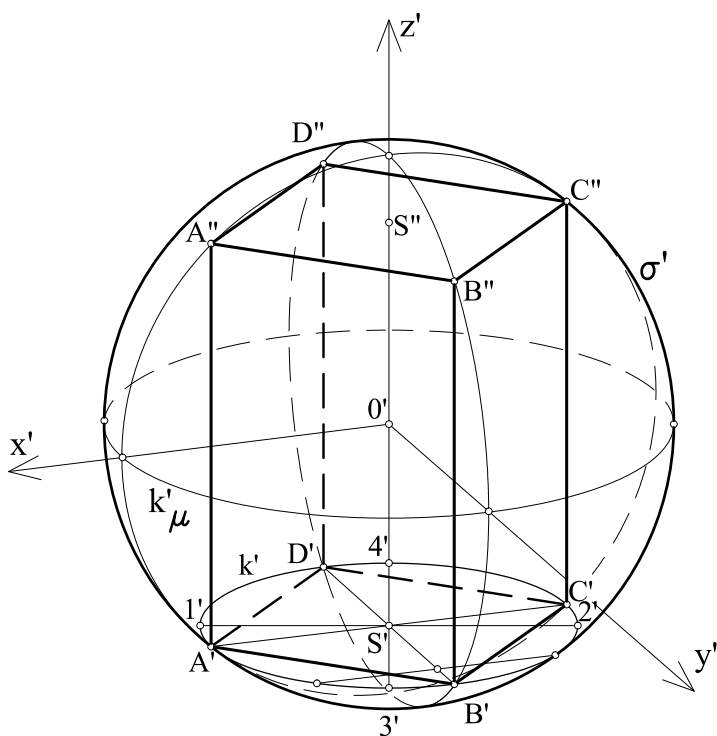


Чертеж 3

Пример 4. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 4)$ и вписана в нея правилна четириъгълна призма с височина $h = 6$ и околни ръбове, успоредни на оста z на координатната система.

Всички направени построения за изобразяването на сферата и на долната основа на призмата са както в пример 1, като разстоянието от точка O' до S' е $\frac{h}{2}$. Радиусите на сеченията на сферата, в които са вписани основите са равни и са $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Изобразена е само проекцията на описаната окръжност около долната основа. Проекциите на околните ръбове на призмата са успоредни и равни и са успоредни на z' . Изобразени са сечението на сферата с първа координатна равнина и сеченията, които съдържат диагоналните сечения на призмата.

Пример 5. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 8$ и основа в първа координатна равнина μ с център O и страни с дължина 8, успоредни на координатните оси. Да се изобрази вписаната в пирамидата сфера и да се намерят допирните точки на сферата с околните стени на пирамидата. Построенията са направени в следната последователност:



Чертеж 4

1. Изобразена е пирамидата, като $|A'B'| = |C'D'| = 8$, $|B'C'| = |A'D'| = 4$, $|O'V'| = h = 8$.

2. За намирането на центъра и радиуса на вписаната сфера е направен помощен чертеж в реални размери – триъгълник KOV . Построена е ъглополовящата на $\angle VKO$. Намерена е точка S – център на вписаната сфера и е определен радиусът $r = |SP|$. Построена е отсечка PW , перпендикулярна на VO .

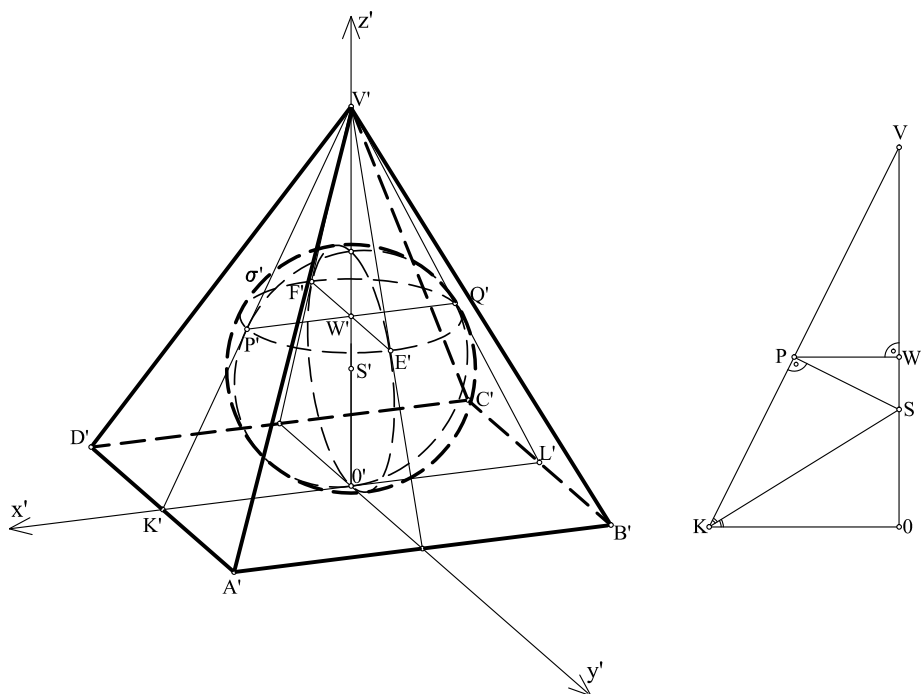
3. На аксонометричния чертеж са нанесени точки S' и W' .

4. Изобразена е окръжност σ' с център S' и радиус $r' = \frac{3\sqrt{2}}{4}r \approx 1.06r$. Това е контурната окръжност на проекцията на сферата.

5. Построени са отсечки $P'Q'$ и $E'F'$, успоредни на x' и y' , съответно. Намерените четири точки са допирните точки на сферата до околните стени на пирамидата.

6. За по-добра нагледност са построени сеченията на сферата с втора и трета координатни равнини, и сечението, което минава през намерените допирни точки.

Построенията са показани на чертеж 5.



Чертеж 5

Чертежите са изработени с помощта на AUTOCAD.

Литература

- [1] В. РАДУЛОВ, И. ПЪРВАНОВА. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения*, (2006) УАСТ, ISBN 13978-954-724-031-5
[V. RADULOV, I. PARVANOV., 2006. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, UACG, (in Bulgarian)]
- [2] В. РАДУЛОВ, И. ПЪРВАНОВА. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения*, (2012) Регалия 6, ISBN 978-954-745-220-6
[V. RADULOV, I. PARVANOV., 2012. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, Regalia 6, (in Bulgarian)]
- [3] Д. ЧОРБАДЖИЕВ. *Дескриптивна геометрия*, УАСТ, (1992).
[D. CHORBADGIEV. 1992. *Descriptive geometry*, UACG (in Bulgarian)]